

Seminar: “Computereinsatz im Mathematikunterricht”



Die Evaluation des Seminars „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ als Reaktion auf die CAS-Einführung im naturwissenschaftlichen Unterricht in Thüringen

Dr. Matthias Müller und Astrid Mastalirsch, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung der Didaktik der Mathematik und Informatik

Projektziel

Um zukünftige MathematiklehrerInnen auf ihre Aufgaben angemessen vorzubereiten und um ihnen die Potenziale des CAS-Einsatzes im Unterricht näher zu bringen, wird an der Friedrich-Schiller-Universität Jena seit einigen Jahren das Seminar „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ (CMU) angeboten. Das Ziel des Seminars ist es, die StudentInnen mit einer Auswahl an digitalen Werkzeugen vertraut zu machen, um inner- und außermathematische Problemstellungen erfolgreich bearbeiten zu können. Dabei soll auch immer wieder der Bogen zum Praxisbezug und zum Unterrichtseinsatz gespannt werden.

Lösung

Mathematica bzw. Wolfram Alpha zählen auch zu diesen digitalen Werkzeugen, welche die StudentInnen kennen lernen und welche sie versuchen, zielgerichtet einzusetzen.

Ergebnis

Die an Beispielen erarbeiteten Potenziale der digitalen Werkzeuge im Unterrichtseinsatz konnten dank *Mathematica* von den Studierenden selbst nachvollzogen und erlebt werden. Damit sind sie für zukünftige Aufgaben besser vorbereitet.

Projektziel

Seit dem Schuljahr 2011/2012 hat sich für viele SchülerInnen der Mathematikunterricht an den Thüringer Gymnasien spürbar verändert, denn es wurden verbindlich Computeralgebra-Systeme (CAS) im naturwissenschaftlichen Unterricht eingeführt.

Der CAS-Einsatz birgt große Potenziale für den Mathematikunterricht und eröffnet neue Möglichkeiten für das Lehren und Lernen. Die angestrebten Veränderungen stellen die Lehrkräfte vor Herausforderungen, denen sie im alltäglichen Schulbetrieb begegnen müssen.

Um zukünftige MathematiklehrerInnen auf ihre Aufgaben angemessen vorzubereiten und um ihnen die Potenziale des CAS-Einsatzes im Unterricht näher zu bringen, wird an der Friedrich-Schiller-Universität Jena seit einigen Jahren das Seminar „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ (CMU) angeboten. Das Ziel des Seminars ist es, die StudentInnen mit einer Auswahl an digitalen Werkzeugen vertraut zu machen, um inner- und außermathematische Problemstellungen erfolgreich bearbeiten zu können. Dabei soll auch immer wieder der Bogen zum Praxisbezug und zum Unterrichtseinsatz gespannt werden. *Mathematica* bzw. *Wolfram Alpha* zählen auch zu diesen digitalen Werkzeugen, welche die StudentInnen kennen lernen

und welche sie versuchen zielgerichtet einzusetzen.



Abbildung 1: TeilnehmerInnen im Seminar CMU

Lösung

Um zu überprüfen, ob das Seminar die gestellten Ziele auch erfüllt, wird es alljährlich evaluiert. Ein kleiner Teil der Ergebnisse soll an dieser Stelle vorgestellt werden. Dabei werden die Daten der Jahre 2011 und 2012 angeführt. Insgesamt haben 27 Lehramtsstudenten in den beiden Jahren das Seminar besucht. Um einen besseren Einblick in das Seminar zu erhalten, soll anschließend eine mathematische Problemstellung exemplarisch erörtert werden, so wie sie einer der Studenten mit Wolfram Alpha bearbeitet hatte.

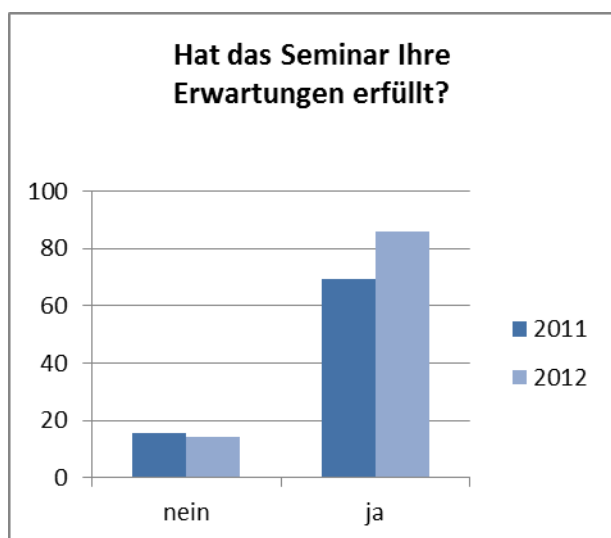


Abbildung 2: Erwartungen an das Seminar CMU. Angaben in Prozent. Differenz zu 100% resultiert aus Kategorie k.A.

Wie man in der Abbildung 2 erkennen kann, erfüllt das Seminar „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ (CMU) die Erwartungen der TeilnehmerInnen weitestgehend. Das wichtige Ziel der Berufsrelevanz wird aus Sicht der StudentInnen erreicht (Abbildung 3). Besonders hervorzuheben ist, dass die entsprechenden Zahlen von 2011 zu 2012 gestiegen sind.

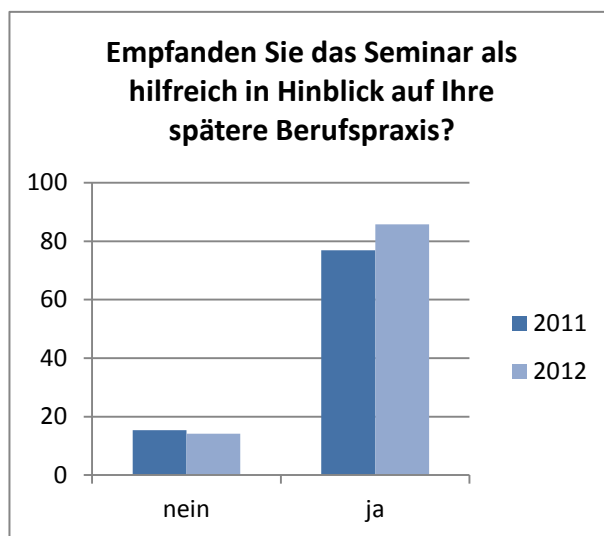


Abbildung 3: Praxisrelevanz des Seminars CMU. Angaben in Prozent. Differenz zu 100% resultiert aus Kategorie k.A.

Eine mögliche Begründung ist, dass die jährliche Evaluation zu einer Verbesserung des Seminars beigetragen hat und dass sich diese Verbesserung in den Zahlen widerspiegelt (Abbildungen 2&3). In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, dass das Seminar die Einstellung der StudentInnen zum Einsatz digitaler Werkzeuge nicht nachteilig beeinflusst hat (<8%, Abbildung 4). Diese Zahl ist von 2011 zu 2012 rückläufig.

Problemstellung einer Beispielaufgabe: Wie kriege ich die Kurve?

Vielleicht haben Sie auch schon einmal beobachtet, wie ein Modellrennauto aus der Bahn geschleudert wird. Man könnte jetzt annehmen, dass es einfach zu schnell gewesen ist. Wenn man den Vorgang aber ein paar Mal wiederholt,

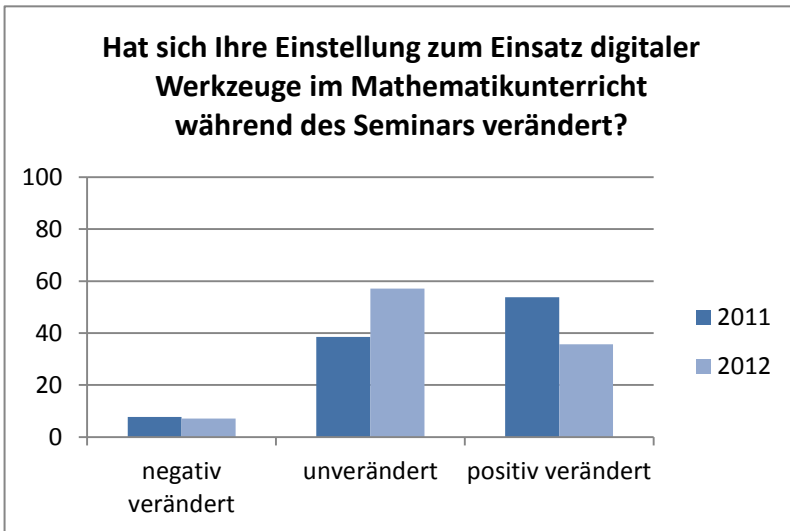


Abbildung 4: Einstellung zu digitalen Werkzeugen. Angaben in Prozent. Differenz zu 100% resultiert aus Kategorie k.A.

fällt etwas auf: Es ist in den meisten Fällen eine bestimmte Stelle, an der die Modellautos die Bahn verlassen. Oft handelt es sich dabei um einen Übergang zwischen einer Geraden und einer Kurve. An diesem Punkt wird es spannend!

Betrachten wir im Folgenden einen bestimmten Streckenabschnitt, der exemplarisch in Bezug auf die Modellierung der Fahrbahn untersucht werden soll. Bei genauerer Betrachtung der Bauteile kann man feststellen, dass es sich um eine 90°-Kurve handelt. Die Kurve entspricht genau einem Viertelkreis und die verbundenen Geraden-Stücke sind wirklich gerade (siehe Abb. 5).

Studentenlösung der Beispielaufgabe mit Wolfram Alpha:

Die Kurve soll mit Hilfe der Graphen zweier linearer Funktionen und einem Kreisbogen (Radius r) beschrieben werden. Wie in der Abbildung 5 schon angedeutet ist, wird das Koordinatensystem so gewählt, dass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung liegt.

Es ergeben sich die folgenden Funktionsterme:

$$f_1(x) = x + \sqrt{2}r \quad \text{für } x \leq \frac{-r}{\sqrt{2}}$$

$$f_2(x) = -x + \sqrt{2}r \quad \text{für } x \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$f_3(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } \frac{-r}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

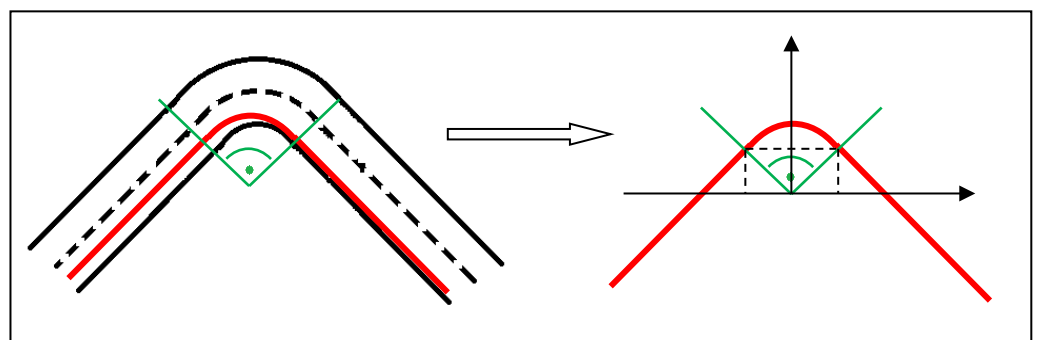
Als erstes könnte man vermuten, dass die Modellrennautos nicht die richtige Richtung haben, wenn sie die Verbindungspunkte passieren. Um das zu überprüfen, müssen nur die ersten Ableitungen an den Verbindungspunkten ermittelt und verglichen werden. Dabei hilft Wolfram Alpha (Abbildung 6).

Es fällt auf, dass die ersten Ableitungen der drei Funktionen jeweils paarweise an den zwei Verbindungspunkten übereinstimmen. Somit haben die Modellautos die richtige Richtung, wenn sie die Kreisbahn verlassen:

$$f_3' \left(\frac{-r}{\sqrt{2}} \right) = 1 = f_1' \left(\frac{-r}{\sqrt{2}} \right)$$

$$f_3' \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) = -1 = f_2' \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

Abbildung 5: Modell einer 90°-Kurve einer Modellautobahn. Modellierung mittels eines Kreisabschnitts und zweier Graphen.



Die nächste Vermutung umfasst die Krümmung der Kurvenabschnitte. Idealerweise sollte die Krümmung an den beiden Verbindungstellen gleich sein, damit die Modellautos diese Stellen ungefährdet passieren können. Um dieser Vermutung nachzugehen, muss man die zweiten Ableitungen ermitteln und an den Verbindungstellen vergleichen. Auch hier hilft wieder Wolfram Alpha (Abbildung 7).

Spannend ist es, eine Funktion zu finden, welche diese Eigenschaft (zweite Ableitung an den Verbindungstellen gleich Null) besitzt. Natürlich sollten aber die Voraussetzungen, dass sie durch die Punkte geht und dass die erste Ableitung an den Punkten 1 bzw. -1 ist, ebenfalls gegeben sein.

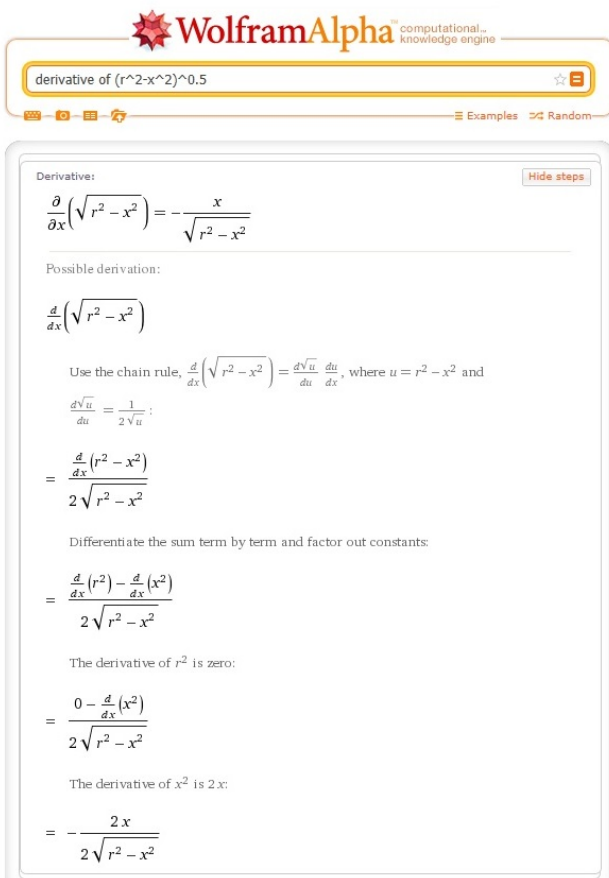


Abbildung 6: Erste Ableitung der Zielfunktion.

Die Krümmung der drei Funktionen stimmt an den entsprechenden Verbindungspunkten nicht überein. Die Modellrennautos erfahren demnach an diesen Punkten zu große Fliehkräfte, welche sie aus der Bahn werfen:

$$f_3''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) \neq 0 = f_1''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f_3''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \neq 0 = f_2''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

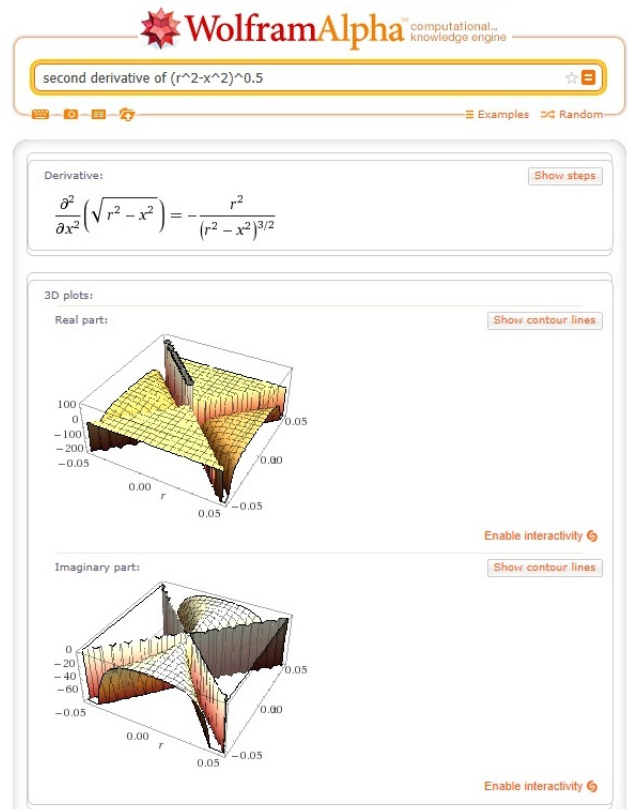


Abbildung 7: Zweite Ableitung der Zielfunktion.

Ein Ansatz ist, ein Polynom fünften Grades zu bestimmen, das alle sechs Eigenschaften erfüllt. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem mit sechs Gleichungen und sechs Unbekannten, welches eindeutig lösbar ist:

$$p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g$$

- I) $\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}}$
- II) $p\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}}$
- III) $p'\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = 1$
- IV) $p'\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$$V) \quad p''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$VI) \quad p''\left(\frac{-r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Dieses Gleichungssystem kann man von Wolfram Alpha lösen lassen. Wenn man den Radius z.B. $r = \sqrt{2}$ setzt, erhält man folgendes Polynom $p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{13}{8}$. In Abbildung 8 wurde dieses Polynom mit Wolfram Alpha geplottet.

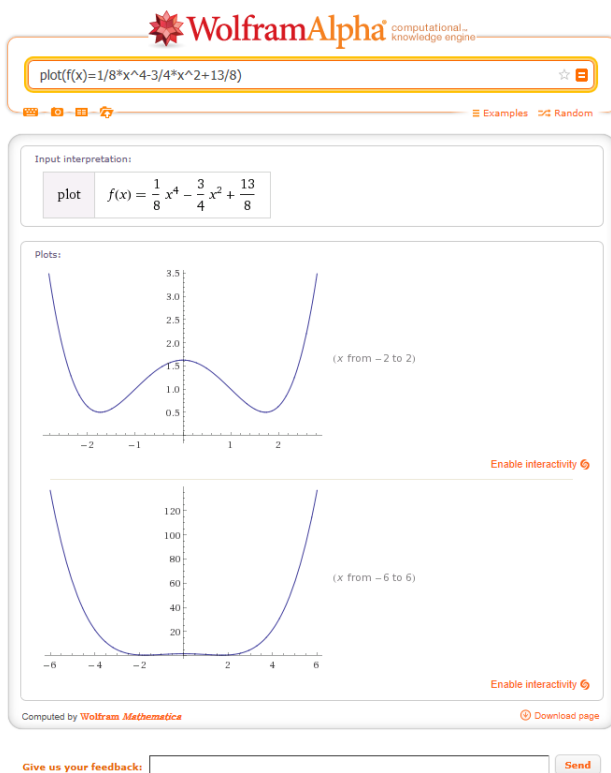


Abbildung 8: Graph der alternativen Funktion.

Ergebnis

Die gefundene Funktion ist eine „geschmeidige“ Alternative für die 90°-Kurve bei einer Modellautorenbahn. Damit wäre das Problem der unterschiedlichen Krümmung an den Verbindungspunkten gelöst. Für den Bau einer echten Schnellstraße reicht das allerdings noch nicht aus. Denn die Krümmung sollte, in dem entsprechenden Intervall langsam zu- bzw. abnehmen, ohne einen kritischen Wert zu überschreiten. Um diesen Anforderungen zu genügen,

verwenden Straßenbauer Klothoide. Das geht aber für ein 90-Minuten Seminar etwas zu weit.

Natürlich hat man mit keiner der hier vorgestellten Befehle das ganze Potenzial von Wolfram Alpha ausgenutzt, aber es ist ein guter Einstieg für SchülerInnen und StudentInnen um den Umgang mit digitalen Werkzeugen zu erlernen. Damit schaffen sie sich insbesondere eine solide Grundlage, um bei ihren zukünftigen Aufgaben eine leistungsstarke Software wie Mathematica einsetzen zu können.



ADDITIVE Soft- und Hardware
für Technik und Wissenschaft GmbH

Max-Planck-Str. 22 b
D-61381 Friedrichsdorf/Ts.

Telefon: +49 (0)61 72-59 05-0
Fax: +49 (0)61 72-77 613
E-Mail: info@additive-net.de
Internet: <http://www.additive-net.de/software>

Die ADDITIVE GmbH ist ein Systemhaus, das Produkte und Dienstleistungen für technische, wissenschaftliche Anwendungen bietet. Mit hochqualifizierten Mitarbeitern aus unterschiedlichen Ingenieurdisziplinen, aufgeteilt in drei Geschäftsbereiche - SOFTWARE, IT-SERVICE und ACADEMY -, schaffen wir mit Ihnen zusammen einen Mehrwert für Ihre Anwendungen.

ADDITIVE wurde 1989 gegründet und hat seinen Firmensitz in Friedrichsdorf am Rande des Taunus. Durch die Nähe zu Frankfurt am Main sind wir in Deutschland wie auch international schnell bei Ihren Anwendungen vor Ort.

Die Kernkompetenzen von ADDITIVE liegen im Bereich der Datenerfassung/-analyse und Datenvisualisierung, Software für Mathematik und Statistik, Software für das statistische Qualitätsmanagement sowie Software für Chemie und Life Science und webbasierten Anwendungen.

ADDITIVE vermarktet Standardprodukte technisch führender Hersteller und ergänzt diese mit umfangreichen Ingenieurdienstleistungen. Diese reichen von der Beratung und dem Verkauf inklusive Pre- und After-Sales-Service bis hin zu kunden- und anwendungsspezifischen Erweiterungen, Systemintegration, Inbetriebnahme, Schulungen u.v.m.

ADDITIVE-Kunden finden sich in allen Branchen wieder, wie z. B. Finance, Automotive, Aerospace, Engineering, Pharma und IT-Services, der kompletten deutschen Forschungslandschaft und allen akademischen Institutionen.



seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik

Ernst-Abbe-Platz 2
D-07743 Jena

Telefon: +49 (0)3641-9300
Fax (Zentrale): +49 (0)3641-931682
E-Mail: Matthias.Mueller.2@uni-jena.de
Internet: <http://www.uni-jena.de>

Die Friedrich-Schiller-Universität Jena ist eine klar konturierte klassische Universität mit rund 19000 Studierenden, darunter über 2200 internationale Studierende.

In Jena ist nichts weit. Die Grenzen sind fließend – urban wie intellektuell. Denn kurze Wege gibt es in Jena auch im übertragenen Sinne: durch persönliche Kontakte zwischen den Wissenschaftlern untereinander und mit den Verantwortlichen in Stadt und Wirtschaft. So lassen sich Vorhaben in Forschung und Lehre schnell und unkompliziert anschieben – und die Kreativität hat freien Lauf. Hier gibt es auch in den Köpfen keine Grenzen, bestätigen viele Jenaer Wissenschaftler und nutzen dies für innovative Projekte über Fachgrenzen hinweg.

Die Mathematik ist in Jena seit der Gründung der Universität vertreten und begründete stets den guten Ruf der Salana in der Vergangenheit mit.

Auch heute sind Mathematik und Informatik tragende Säulen der Universität und bestimmen ihr modernes Profil mit. Das Studienangebot der Fakultät umfasst die Bachelor- und Masterstudiengänge Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Informatik, Angewandte Informatik, Computational Science und Bioinformatik, die Lehramtsausbildung in Mathematik und Informatik sowie die Ausbildung Mathematik/Informatik als Ergänzungsfach.