

Wettbewerbsjahr: **2014**  
Bundesland: **Nordrhein-Westfalen**  
Sparte: **Jugend forscht**  
Fachgebiet: **Physik**  
Betreuer: **Ulrich Arndt, St. Michael-Gymnasium**  
Patentanmeldung: **nein**  
Tierversuche: **nein**  
Projektnummer: **126246**

## **Untersuchungen zur Kugelstoß-Pendelkette und zur Hertzschen Kontakt-Theorie**

(Projekttitle)

### **1. Teilnehmer**

Vorname: **Simon**  
Name: **Huppertz**  
Geb.-Datum: **04.03.1996**  
E-Mail: **Simon-huppertz@t-online.de**  
Schule/Betrieb/Uni: **St. Michael-Gymnasium**

### **2. Teilnehmer**

Vorname: **Kristof**  
Name: **Heck**  
Geb.-Datum: **19.04.1996**  
E-Mail: **kristof.heck@gmx.de**  
Schule/Betrieb/Uni: **St. Michael-Gymnasium**

Der/die Teilnehmer versichere/n, dass er/sie die Teilnahmebedingungen des Wettbewerbs unter [www.jugendforscht.de](http://www.jugendforscht.de) und die Vorgaben des Veranstalters anerkenne/n. Er/Sie hat/haben die Arbeit selbstständig angefertigt und alle verwendeten Quellen sowie alle unterstützenden Unternehmen, Institutionen und Personen und die Art der Unterstützung in der Arbeit genannt. Bei Forschungsarbeiten mit Tieren wurden alle Vorgaben der Tier-, Natur- und Artenschutzgesetze eingehalten und insbesondere das "Formular für Forschungsarbeiten mit Tieren" unterschrieben eingereicht.

## **Kurzfassung:**

Die an unserer Schule vorhandene Kugelstoß-Pendelkette hat uns seit unserem ersten Gang in die Physiksammlung der Schule fasziniert. Bei unseren Facharbeiten zum Thema „Kugelkette“ haben wir bemerkt, dass in dieser Versuchsanordnung mehr Physik steckt, als man auf den ersten Blick sieht. Deswegen haben wir uns entschlossen, die Kugelkette im Rahmen dieser Arbeit gründlicher zu untersuchen.

Nach einem kurzen Rückblick zeigen wir am Beispiel für eine Kugelkette mit drei Kugeln theoretisch, dass Impuls- und Energie-Erhaltung nicht ausreichen, um das jedem aus den Spielzeug-Anordnungen bekannte „Verhalten“ der Kette zu erklären. Diese Erklärung ist mit der Hertzschen Kontakttheorie möglich, deren Hauptergebnisse (Kraftgesetz und Stoßdauer) wir skizzieren. Das 1882 von Hertz aus ganz allgemeinen Gesetzen der Elastizitätstheorie gefundene Kraftgesetz für die „Berührung fester elastischer Körper“ wird an einem einfachen Modell erläutert.

Wir stellen die Besonderheiten der „Monschauer Kugelkette“ vor und wie sie von uns justiert wurde. Anschließend beschreiben wir unsere experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten für das Kugelmaterial. Diese Konstanten müssen bekannt sein, damit der Vergleich unserer Signalmessungen mit der Hertzschen Theorie möglich ist. Dazu wird auch die Registrierung eines Stoßsignals mit einer Piezoscheibe analysiert. Die Scheibe steckt in der „Sensor-Kugel“ senkrecht zur Stoßrichtung. Es wird gezeigt, dass die gemessene Pulsdauer mit der Hertzschen Stoßdauer übereinstimmt. Mit der Sensorkugel werden die von der Theorie her geforderten „Hertz-Pulse“ nachgewiesen, die den inneren Mechanismus der Kette steuern. Abschließend folgt eine kurze Betrachtung zur Dispersion und eine Fehlerbetrachtung.



RECUEIL  
DE PLUSIEURS TRAITÉZ  
DE MATHÉMATIQUE  
DE L'ACADEMIE ROYALE  
DES SCIENCES  
A PARIS,  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE  
M. DC. LXXXVI  
(1676)

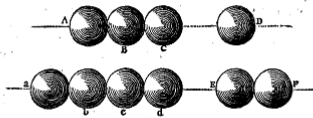
Edme Mariotte (1620–1684)

TRAITÉ  
DE LA PERCUSSION  
OU CHOQ DES CORPS  
DANS LEQUEL LES PRINCIPALES REGLES  
du mouvement font expliquées, & démontrées par leurs véritables causes.

Par M. MARIOTTE

PROPOSITION XXVIII.

Si trois boules d'ivoire, ou d'autre matière à ressort ferme, A, B, C, sont égales entre elles, & contiguës, & qu'une autre boule D de même matière & de même pesanteur, choque directement la boule C, selon la ligne A D qui passe par leurs centres



tres; les boules C & B demeureront en repos après le choq, & la boule D auffy, & la seule boule A s'avancera avec la même vitesse qu'avoit la boule D avant le choq; & quelque nombre de boules qu'il y ait de suite, soit deux, ou trois, ou quatre, &c. il n'y aura toujours que la plus éloignée qui se mettra en mouvement, si leurs centres font en une même ligne droite.



Journal  
für die  
reine und angewandte Mathematik

Zweundneunzigster Band.  
In vier Heften.

Berlin, 1882

Heinrich Hertz (1857–1894)

Ueber die Berührung fester elastischer Körper.

(Von Herrn Heinrich Hertz.)

Man überzeugt sich leicht, dass das vorgelegte System von Verschiebungen den für  $\xi, \eta, \zeta$  aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dass in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Componenten der Drucke erhalten wir:

$$X_x = -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial x} \right\}, \quad X_y = -2K \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y},$$

$$Y_x = -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial x} \right\}, \quad X_z = -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} + \theta \frac{\partial P}{\partial x} \right\} = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z},$$

$$Z_x = -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} \right\}, \quad Y_z = -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} + \theta \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}.$$

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 + \frac{4}{3} k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$$

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Untersuchungen zum Pendelketten-Mechanismus in der Vergangenheit	3
1.2	Energie- und Impulserhaltung in der Pendelkette	3
2	Zur Hertzschen Kontakttheorie	4
2.1	Hertzsches Kraftgesetz	4
2.2	Unser einfaches Modell zum Hertzschen Kraftgesetz	5
2.3	Maximal-Abplattung und Stoßdauer	7
3	Aufbau der Kugelstoßpendelkette	8
3.1	Beschreibung des Aufbaus	8
3.1.1	Kugelaufhängung	9
3.1.2	Sensor-Kugel und Startmechanismus	9
3.2	Zur Justage der Anordnung	10
4	Experimentelle Untersuchungen	10
4.1	Messung der Elastizitätskonstanten für das Kugelmateriale Aramith	10
4.2	Zur gemessenen Pulsform	12
4.2.1	Bestimmung der Aufprallgeschwindigkeit $v_0$	12
4.2.2	Ist das gemessene Signal ein Hertz-Puls?	13
5	Hertz-Pulse in der Kugelkette	14
5.1	Messung der Hertz-Pulse	14
5.2	Zum Kugelkettenmechanismus	14
6	Dispersion	15
7	Fehlerbetrachtung	16
8	Schluss	16
9	Quellenverzeichnis	17
10	Danksagung	18

# 1 Einleitung

Kugelstoßketten sind seit dem 17. Jahrhundert bekannt, ([1], S.37). Heute findet man sie oft als Spielzeug. In dieser Anordnung steckt viel mehr Physik als wir zunächst annahmen. An unserer Schule gibt es eine große Kugelstoß-Pendelkette, die uns schon beim ersten Gang in die Physiksammlung faszinierte. Pulsförmige Signale, die sich in einer Kugelkette fortpflanzen, wurden bereits 1986 an der Schule qualitativ mit einer Holzkugelkette nachgewiesen, in der es eine „Sensor-Kugel“ gab. Weil diese Anordnung extrem schwierig zu justieren und zu bedienen war, baute Walter Thomas 1987 im Anschluss an ein Jugend-forscht-Projekt (Statische und dynamische Überprüfung der Hertzschen Kontakttheorie mit zwei Stahlkugeln auf kontakt-elektrischem und optischem Weg, NRW 1984) eine ordentlich arbeitende und einfach zu handhabende Apparatur, damit der Kugelketten-Mechanismus an der Schule quantitativ untersucht werden kann, Abb. 1.



Abbildung 1: Die Monschauer Kugelkette

Ob die registrierten Pulsfolgen wirklich „Hertz-Pulse“ sind, blieb viele Jahre lang unklar, insbesondere, warum die Extrema in der Pulsfolgen-Registrierung einen absteigenden Verlauf haben, vgl. Abb. 2.

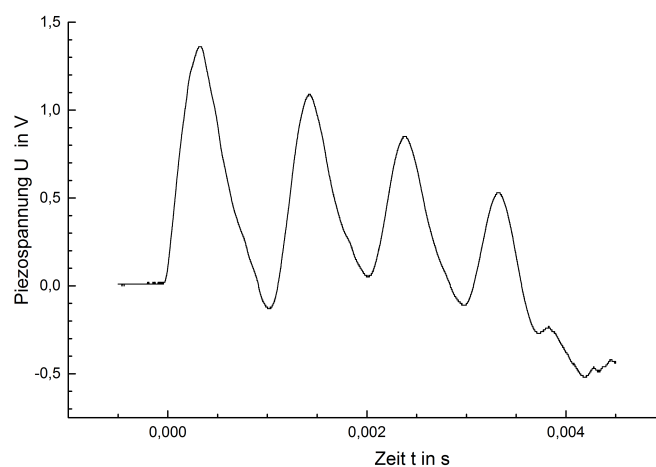


Abbildung 2: Stoßsignal. Mit dem Piezo-Sensor registriertes Signal, nachdem eine Gruppe von 4 Kugeln auf die restliche Kette gestoßen ist.

Wir haben die in die Jahre gekommene Kugelkette im Rahmen unserer Facharbeiten dahingehend überprüft, was an ihr zu reparieren und zu erneuern ist. Die entsprechenden Arbeiten wurden später - nach unserem Entschluss zur Teilnahme am Wettbewerb - am Physikalischen Institut III(A) der RWTH Aachen durchgeführt, vgl. Kapitel 3.1 und die Danksagung.

In dieser Arbeit wollen wir (1) den Kugelketten-Stoßprozess auch im Hinblick auf Energie- und Impulserhaltung genauer untersuchen, (2.1) den statischen Teil von Heinrich Hertz' Abhandlung „Über die Berührung fester elastischer Körper“ ([2]) für gleichartige Kugeln darstellen, weil diese Abhandlung von Herrmann und Seitz ([3], S.977) als grundlegend für das Verständnis des Kugelkettenmechanismus beschrieben wird, (2.2) das Hertzsche Abplattungsgesetz  $F = H\xi^{1,5}$  mit einem einfachen Modell beschreiben, (2.3) die Hertzsche Kontakttheorie für den Stoß skizzieren, (vgl. [4], S.262 f.), (3) den Aufbau der „Monschauer Kugelkette“ und unsere Justierungsmethode erläutern, (4.1) unsere Messung der elastischen Konstanten des Kugelketten-Materials schildern, (4.2) die besondere Form der registrierten Pulse kommentieren, um dann (5.1) die in der Kugelkette registrierten Pulsfolgen mit der Hertzschen Theorie zu vergleichen und (5.2) den Kugelkettenmechanismus zu beschreiben. Abschließend soll untersucht werden, warum der Mechanismus nicht auf Dauer aufrecht erhalten bleiben kann (6) und wie groß der Fehler bei unserer Bestimmung der Stoßdauer ist, (7).

Mit unserer Arbeit wollen wir an das anknüpfen, was unsere Jugend-forscht-Vorgänger Walter Thomas, Volkmar Offermann und Ulrich Woesler vor 30 Jahren begonnen haben ([5]).

## 1.1 Untersuchungen zum Pendelketten-Mechanismus in der Vergangenheit

An unserer Schule ist viel Literatur zum Thema vorhanden, die wir nicht alle lesen konnten. Teilweise gibt es sehr theoretische Untersuchungen, teilweise sehr praktische, ([3]; [6]; [7]). Wir haben keine Untersuchungen finden können, bei der Pulse direkt im Innern der Kugeln gemessen wurden. Allerdings wurden Beschleunigungsaufnehmer bei der Untersuchung von linearen Kugelstoßketten verwendet, bei denen die Kugeln auf Plexiglas gelagert waren und die aufprallende Kugel kleiner als die anderen Kugeln war, ([8] u. [9]). Weiterhin wurde bei Kugelstoß-Pendelketten mit Stahlkugeln bei einer anfänglich ausgelenkten Kugel die Zeit vom ersten Kontakt am Anfang der Kette bis zum Wegfliegen der letzten Kugel am anderen Ende elektrisch gemessen, ([3], S. 980 f. und [10]). Die gemessenen Zeiten werden mit der Hertzschen Theorie erklärt und man findet folgendes geschrieben: „As the perturbation passes down the chain, the additional collision times are half of the collision times for the first collision.“ ([10], S.323). Wir haben nahezu äquidistante Peaks nahezu gleicher Breite beobachtet, vgl. Kap. 5.1.

## 1.2 Energie- und Impulserhaltung in der Pendelkette

Das Verhalten der Kugelstoß-Pendelkette im Sinn von: „n Kugeln stoßen auf die Kette, n Kugeln fliegen am anderen Ende weg“, wird in einem Physik-Lehrbuch nur durch Energie- und Impulserhaltungssatz erklärt, ([4], S.257 f.). So einfach ist es nicht.

Bei einer 3er-Kugelkette mit einer anfänglich ausgelenkten Kugel gilt für Impuls  $p$  und Energie  $E$ :

$$p : 1 + 0 + 0 = 0 + 0 + 1; \quad E : 1^2 + 0^2 + 0^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2. \quad (1)$$

Es ist aber auch bei

$$p : 1 + 0 + 0 = -1/3 + 2/3 + 2/3; \quad E : 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1/9 + 4/9 + 4/9 \quad (2)$$

Energie und Impuls erhalten. Bei (2) stößt die ausgelenkte Kugel auf zwei ruhende, die allerdings zusammengeklebt sind.

Ein weiteres Beispiel ist:

$$p : 1 + 0 + 0 = -2/7 + 3/7 + 6/7; \quad E : 1^2 + 0^2 + 0^2 = 4/49 + 9/49 + 36/49. \quad (3)$$

Impuls-Erhaltung  $v_1' + v_2' + v_3' = 1$  und Energie-Erhaltung  $v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = 1$  führen auf die Gleichung zweiten Grades  $v_3'^2 + v_2'v_3' + v_2'^2 - v_3' - v_2' = 0$ , die eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = \sqrt{2/3}$  und  $b = \sqrt{2/3}$  darstellt, die um  $-45^\circ$  gedreht ist und durch den Ursprung geht, (vgl. Abb. 3). Das Beispiel (3) ist dort auch eingezeichnet.

Es gibt also unendlich viele Ausgangs-Zustände  $(v_1'; v_2'; v_3')$ , falls  $p_{ges} = 1$  und  $E_{ges} = 1$  ist. Deswegen kann man eine Kugelkette auf einer Luftkissenfahrbahn nicht mit Gleitern simulieren an deren Enden Ringfedern angebracht sind, vgl. [3], (S.977-978). - Im Kugelketten-Mechanismus muss also ein „Geheimnis“ stecken, weil Impuls- und Energieerhaltung nicht ausreichen, um den Mechanismus eindeutig zu erklären; für jedes Tripel  $(v_1; v_2; v_3) = (1; 0; 0)$  sind nach dem Stoß alle Konfigurationen möglich, welche der durchgezogene Teil der Konfigurationsellipse von Abbildung 3 zeigt.

**Energie - und Impuls - Erhaltung allein  
können den Kugelketten-Mechanismus *nicht* erklären**

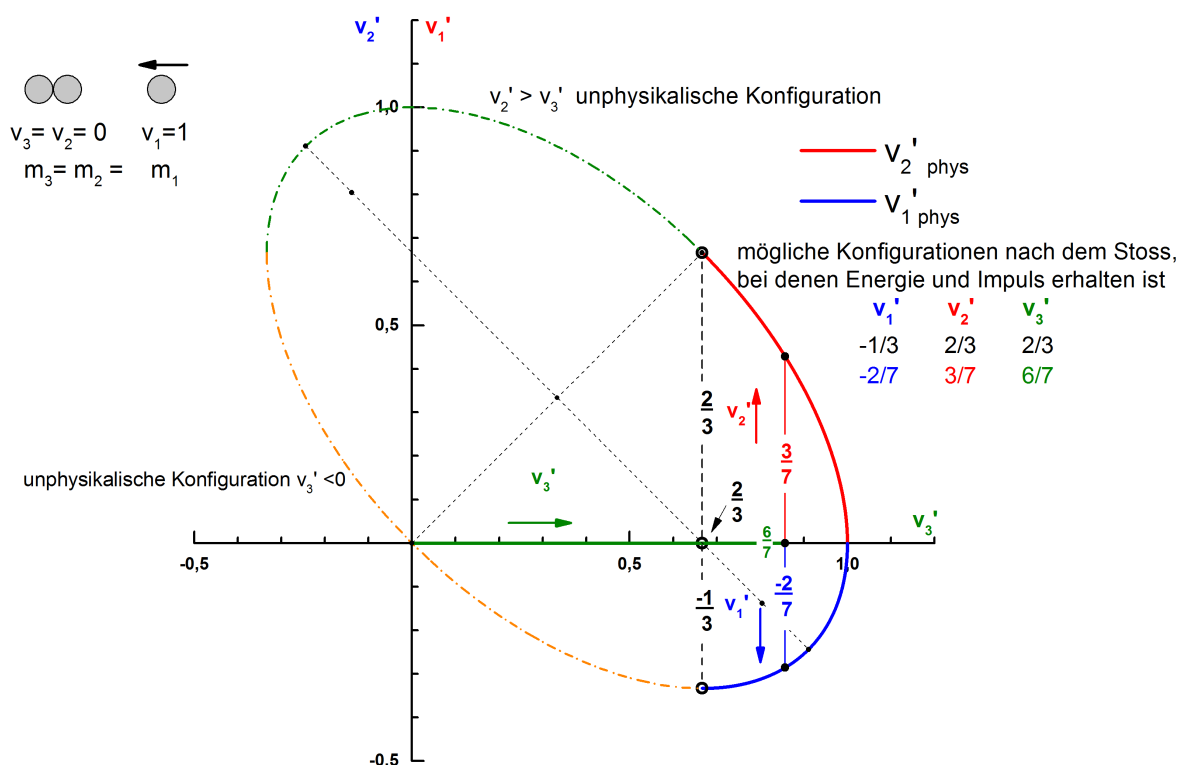


Abbildung 3: Konfigurationsellipse

## 2 Zur Hertzischen Kontakttheorie

### 2.1 Hertzisches Kraftgesetz

Heinrich Hertz untersucht in seiner schon genannten Abhandlung von 1882 den mechanischen Kontakt von Körpern, (von denen mindestens einer eine gekrümmte Oberfläche hat), sowohl statisch (Abb. 4) als auch dynamisch, (vgl. Kap. 2.3). Werden zwei gleichgroße Kugeln aus demselben Material so aufeinander gedrückt, wie es Abb. 4 zeigt, platten sich die Kugeln mit einer ebenen, kreisförmigen Kontaktfläche ab. Die dabei bewirkte Abplattung  $\xi$  ist gleich der Annäherung der Kugelmittelpunkte  $\xi = y_1 - y_2$ , hier ist  $y_2 = 0$ . Das von Heinrich Hertz für die statische Berührung zweier elastischer Körper gefundene Kraftgesetz lautet in heutiger Schreibweise, (vgl. [4], S. 262 f.):

$$F = H \cdot \xi^{1,5}. \quad (4)$$

Hierin ist H eine „Constante [...] die nur von der Form der Oberflächen und den Elasticitätsverhältnissen in unmittelbarer Nähe des Stoßpunktes abhängt“, ([2], S. 169). Anders als bei Hooke ist die Hertzische Kontaktkraft also überproportional zum Verformungsweg  $\xi$ .

Hertz leitet das Kraftgesetz aus sehr allgemeinen, komplizierten Gleichungen her, ([2], S.158-166); diese Herleitung haben wir nicht verstanden. Den übrigen Teil der Abhandlung konnten wir uns nach einigem Training größtenteils erschließen. Hertz nennt das Kraftgesetz ( $\xi \sim F^{2/3}$ ) verbal auf Seite 164 Mitte und schreibt auf Seite 166 (nach Zeile 9 v.u.): „Man findet (...) für den Radius des Druckkreises  $a$  und für die Annäherung  $\alpha$  der Kugeln (...):

$$a = \sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad \alpha = \frac{3p(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{16a} \quad (...). \quad "$$

Wir wollen hieraus das Hertzische Kraftgesetz für Kugeln finden, insbesondere die Proportionalitätskonstante H. Bei Hertz, (S. 160), ist p die Druck-Kraft,  $\vartheta$  ist eine Abkürzung:

$$\vartheta = \frac{2(1 + \theta)}{K(1 + 2\theta)}. \quad (5)$$

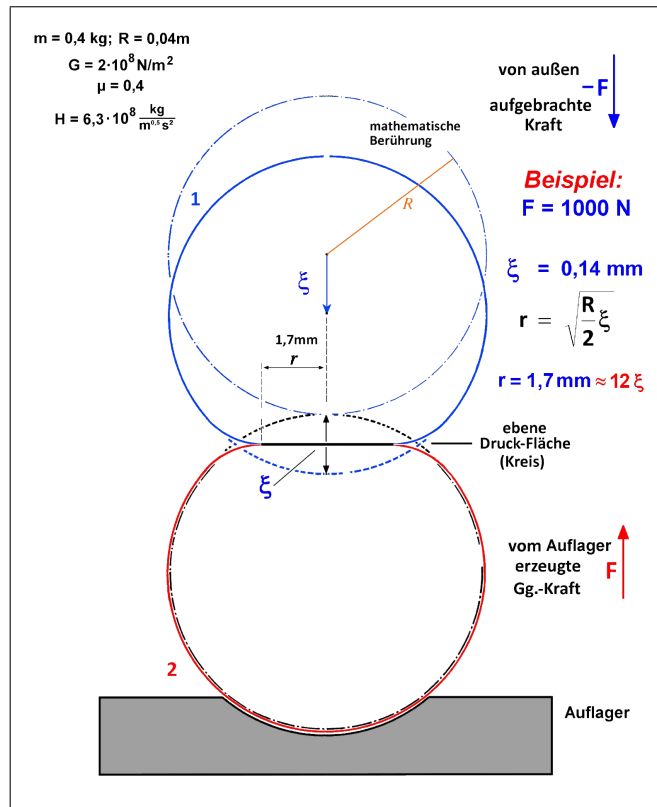


Abbildung 4: Hertz'sche Pressung. Man erkennt, dass sowohl bei der mathematischen Berührung als auch im abgeplatteten Zustand eine Achsensymmetrie vorliegt, wobei die Achse horizontal durch den jeweiligen Schwerpunkt verläuft.- Drückt man zwei Kugeln unserer Kugelkette mit der Kraft  $F = 1000 \text{ N}$  zusammen, dann platten sich die Kugeln um  $\xi = 0,14 \text{ mm}$  ab. Der  $3,4 \text{ mm}$  große Durchmesser der kreisförmigen Kontaktfläche ist 24 mal so groß.

In Gleichung (5) sind  $\theta$  und  $K$  die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten.  $\theta = \mu/(1 - 2\mu)$ ,  $K = G$ , wobei  $G$  der Schubmodul und  $\mu$  die Querkontraktionszahl ist. Damit ist  $\vartheta = 2 \cdot (1 - \mu)/G$  und „ $\rho_1$  und  $\rho_2$  sind die reziproken Radien der sich berührenden Kugeln (...)“ ([2], S.166). Bei der Kugelkette sind die Kugeln aus gleichem Material und gleich groß, ( $\vartheta_1 + \vartheta_2$ ) =  $2\vartheta$ ,  $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho$ . Wir nehmen nun folgende Übersetzung vor:  $\rho = 1/R$ ,  $\alpha = \xi$ ,  $a = r$ , dann hat man  $r^3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu}{G} \cdot R \cdot F$  und damit  $\xi^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\mu}{G}\right)^2 \cdot \frac{2}{R} \cdot F^2$ . Hieraus folgt:

$$F = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{G}{1-\mu} \cdot \sqrt{\frac{R}{2}}\right) \cdot \xi^{1,5}. \quad (6)$$

Damit ist die Hertz'sche Proportionalitätskonstante für die Berührung gleichartiger Kugeln (Kugelkette) also:

$$H = \frac{4}{3} \cdot \frac{G}{1-\mu} \cdot \sqrt{\frac{R}{2}}.$$

## 2.2 Unser einfaches Modell zum Hertz'schen Kraftgesetz

Wir wollen uns dem Hertz'schen Kraftgesetz, das Hertz - wie oben erwähnt - aus einem dreidimensionalen Differentialgleichungssystem hergeleitet hat, durch folgendes Modell nähern, das allerdings nur zwei Dimensionen betrachtet. Dass wir unser Modell nicht auf drei Dimensionen ausweiten konnten, führen wir auf die in der Hertz'schen Theorie liegende Komplexität zurück und auf das Problem, (Feder-) Punkte auf einer Kugel gleichmäßig zu verteilen. Dieses Verteilungsproblem könnte man physikalisch lösen, indem man gleich geladene Kügelchen auf eine Kugel setzt. Tatsächlich schreibt Hertz, dass „die Druckfläche die mit Elektrizität belegte Fläche ist“, (vgl. [2] S.161). Damit betrachtet Hertz hinsichtlich des Verteilungsproblems statt einer Kugel eine ebene Fläche. — Rein mechanisch kann die Kontaktfläche nach Hertz als Feder verstanden werden, deren Federkonstante mit dem Zusammendrücken immer größer wird: Stellt man sich nun eine Kugel so vor, dass sie im Außenbereich aus gleichartigen Federn besteht, liegt die Situation vor, die Abb. 5 zeigt. Als erste wird diejenige Feder zusammengedrückt, die sich genau oben am Punkt  $H$  des ersten Kontakts befindet. Nach dem Hookeschen Gesetz ist  $F_{Feder} = D \cdot s$ . Da alle Federn die gleiche Federkonstante  $D$  besitzen sollen, folgt: je weiter die Kugeloberflächen nun aufeinander gedrückt werden, umso mehr Federn werden zusammengedrückt.



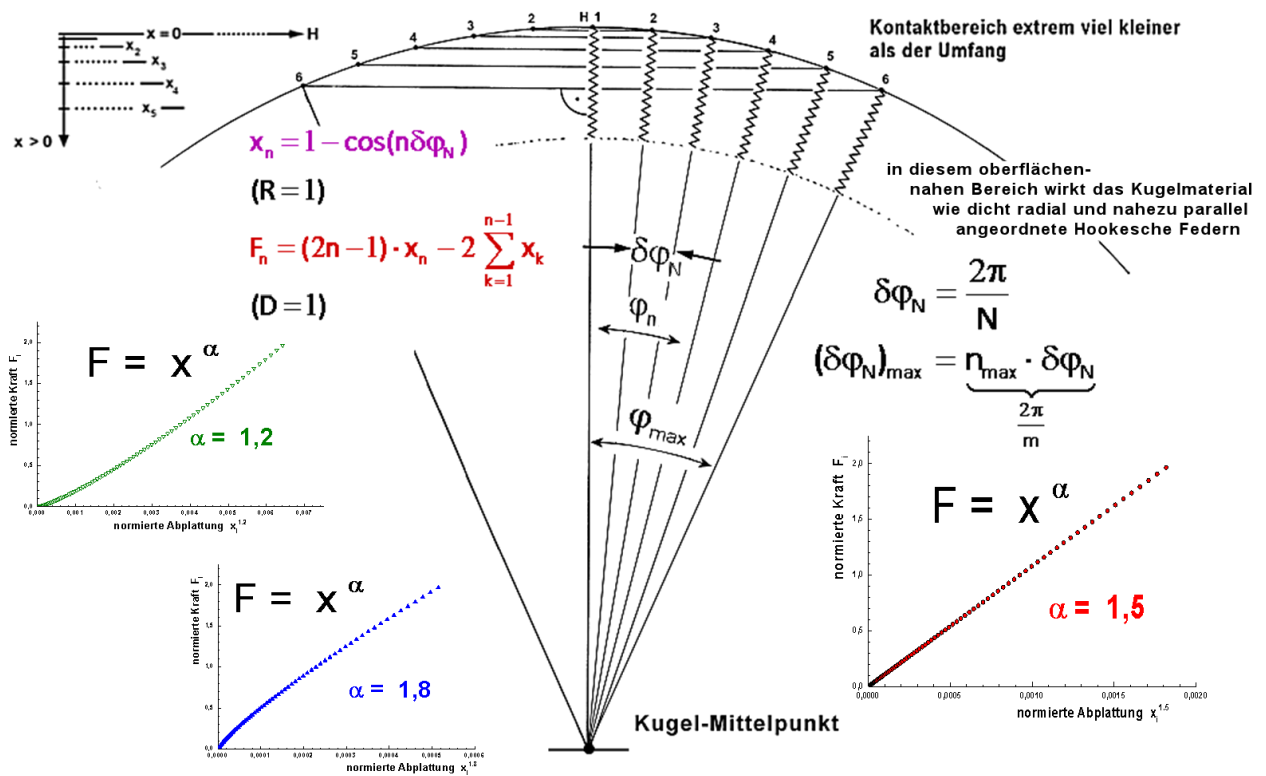


Abbildung 5: Konzept Federmodell. Die Kugel muss man sich nahezu unendlich groß denken, damit der Kontaktbereich klein gegenüber dem Radius ist. „Unsere Maasse wollen wir so wählen, dass die Druckfläche endlich erscheint, dann gelten unsere Betrachtungen für das ganze endliche Gebiet, die Gesamtdimensionen der sich berührenden Körper aber haben wir uns als unendlich vorzustellen“, ([2], S.157).

Da diese aber durch die Krümmung der Kugeloberfläche nicht auf einer gemeinsamen Höhe mit der ersten gedrückten Feder sind, lautet das Hookesche Gesetz für fünf zusammengedrückte Federn (Nr. 3, 2 links; 1 Mitte; Nr. 2, 3 rechts) wegen der Streckenänderung  $s = x_3 + 2 \cdot (x_3 - x_1) + 2 \cdot (x_3 - x_2)$  wie folgt:

$$F_3 = D \cdot [(5x_3 - 2 \cdot (x_1 + x_2))]. \quad (7)$$

Allgemein lässt sich also für die Kraft  $F_n = F(x_n)$  nach dem Hookeschen Gesetz formulieren:

$$F_n = D \cdot [(2n - 1) \cdot x_n - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} x_i]. \quad (8)$$

Trägt man jetzt  $F_n$  gegenüber  $x_n^\alpha$  auf, wobei der Exponent  $\alpha$  variabel ist, zeigt sich erstaunlicherweise genau für  $\alpha = 1,5$  eine Proportionalität, (vgl. Abb 5 rechts). – Zur theoretischen Herleitung haben uns die folgenden beiden Diagramme geführt.

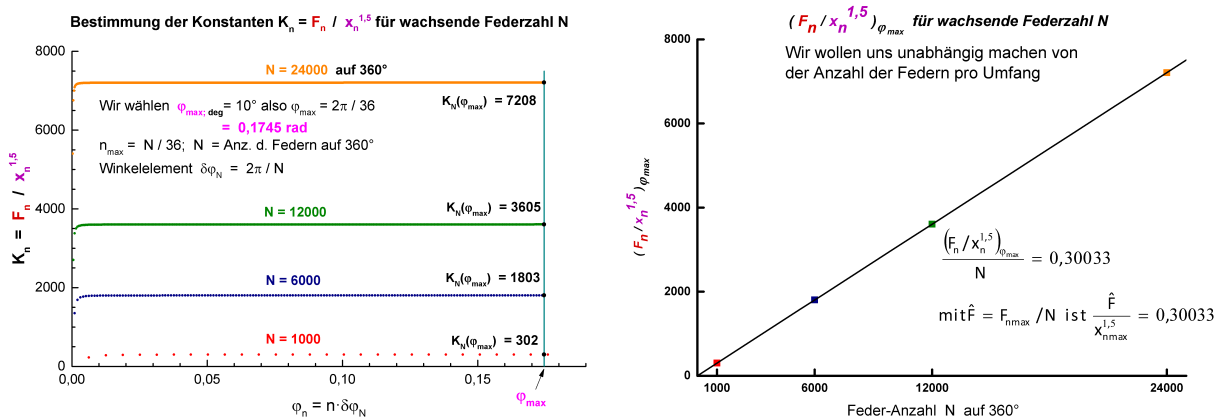


Abbildung 6: Links: Der Quotient  $F_n/x_n^{1,5}$  ist nahezu konstant, hängt aber von der Gesamtfederzahl N ab. Rechts: Der Quotient  $F_n/x_n^{1,5}$  ist proportional zur Federanzahl N.





Hertz integriert über den Weg, wobei er wegen  $\ddot{\xi} = d\dot{\xi}/dt$  sowie  $d\xi/dt = \dot{\xi}$  die Gleichung  $\ddot{\xi}d\xi = \dot{\xi}d\dot{\xi}$  ausnutzt:

$$m \int_{v_0}^{\dot{\xi}} \dot{\xi}' d\dot{\xi}' = -2H \int_0^{\xi} \xi'^{1,5} d\xi' \quad ,$$

also

$$\frac{m}{2} \dot{\xi}^2 + \frac{4}{5} H \xi^{2,5} = \frac{m}{2} v_0^2. \quad (12)$$

Dies ist die Energie-Erhaltung im Schwerpunktsystem. Addiert man auf beiden Seiten  $v_0^2 = (v_1 + v_2)^2$  und ersetzt  $\dot{\xi}$  mit  $v_1 - v_2$ , dann erhält man die Energie-Erhaltung in der bekannten Form

$$\frac{m}{2} v_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 + \frac{2}{5} H \xi^{2,5} = \frac{m}{2} \cdot v_0^2 \quad .$$

Hierin ist  $\frac{2}{5} H \xi^{2,5}$  die in der Abplattung gespeicherte potentielle Energie. Zum Zeitpunkt der halben Stoßdauer ( $t = \tau/2$ ) sind die Kugeln maximal abgeplattet und ihre Relativgeschwindigkeit ist null.

$$\xi(\tau/2) = \xi_{max} \quad , \quad \dot{\xi}(\tau/2) = 0.$$

Aus Gleichung (12) erhält man dann

$$\xi_{max} = \left( \frac{5}{8} \frac{m}{H} v_0^2 \right)^{0,4} \quad (\text{Maximal-Abplattung}) \quad (13)$$

Hertz integriert Gl.(12) noch einmal. Wir formen die Gleichung vorher um und beachten  $\frac{5}{8} \frac{m}{H} v_0^2 = \xi_{max}^{2,5}$ . Damit ist

$$|\dot{\xi}| = v_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\xi}{\xi_{max}} \right)^{2,5}}.$$

Für  $\dot{\xi} > 0$  ist dann mit der normierten Abplattung  $\hat{\xi} = \frac{\xi}{\xi_{max}}$  und  $d\xi = \xi_{max} d\hat{\xi}$  wegen  $\dot{\xi}(\tau/2) = 1$

$$\int_0^{\tau/2} dt = \frac{\xi_{max}}{v_0} \int_0^1 \frac{d\hat{\xi}}{\sqrt{1 - \hat{\xi}^{2,5}}}. \quad (14)$$

Das bestimmte Integral hierin berechnet sich mit WolframAlpha [11] zu  $\eta = 1,47164$ ; dann ist

$$\tau = \frac{2 \cdot \eta \cdot \xi_{max}}{v_0}. \quad (\text{Stoßdauer}) \quad (15)$$

## 3 Aufbau der Kugelstoßpendelkette

### 3.1 Beschreibung des Aufbaus

Eine nur auf den ersten Blick ähnlich aussehende Kugelkette wie die unsere gibt es z.B. an der Universität Hamburg, ([12]). W. Thomas hat die Sensor-Kugel konzipiert im Anschluss an ein Vorlesungsexperiment von Prof. Dr. A. Böhm (RWTH Aachen), bei dem eine Piezo-Scheibe zwischen zwei Kugeln gehalten wurde, die immer wieder zerbrach. Nachdem wir unsere Schulkugelkette von 1987 genau angeschaut hatten, wurden für unsere Untersuchungen viele Details ersetzt (Kugeln, Pendelschnüre, Hubmotoren) bzw. überholt und optimiert (obere Kugelaufhängung, Startmechanismus, Äquatormarkierung). Wir haben also am Bau der Kette selbst kaum Anteil; an den im Physikalischen Institut IIIA von Mechaniker-Meister J. Grooten vorgenommenen Verbesserungen waren wir nur am Rande beteiligt. - Die Kugelkette ist sozusagen ein Amperemeter, das wir zu Messungen benutzt und dessen Innenleben wir dazu vorher im Hinblick auf Optimierung genau untersucht haben.

Die Kugelstoß-Pendelkette des St.-Michael-Gymnasiums hat 9 Kugeln, die bifilar an Metall-Seilchen aufgehängt sind. Die mittlere Kugel ist die sogenannte Sensorkugel, (vgl. Kap. 3.1.2). Die Kugeln bestehen aus Aramith, einem Phenolformaldehyd-Harz.

### 3.1.1 Kugelaufhängung

Zur Aufhängung jeder Kugel gehört zunächst die Befestigungsschraube an der Kugel (Abb. 8 links). Oben am Rahmen sind zwei Metallstangen parallel zueinander in gleicher Höhe montiert, an denen für jede Pendelschnur jeweils zwei gegenüberliegende Klemmen angebracht sind, (Abb. 8 Mitte und rechts). Diese Klemmen sind horizontal mit der Schraube (A) verstellbar, womit die Kugeln in dieser Richtung justiert werden können. Mit den zentrisch durchbohrten Schrauben (3) ist eine Höhenverstellung der Kugeln möglich.

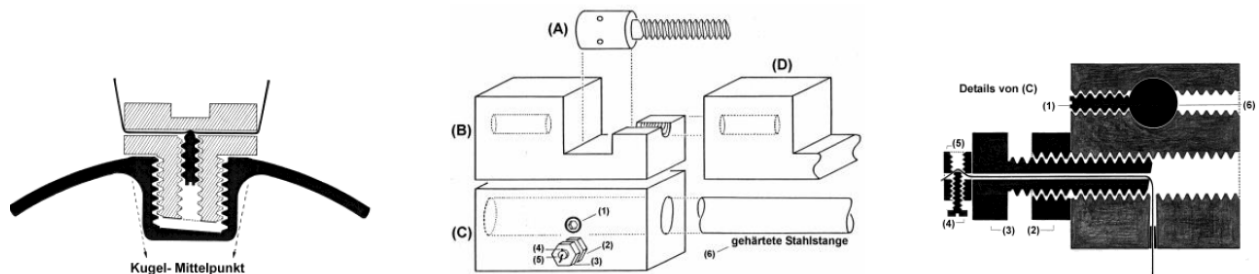


Abbildung 8: Befestigung an der Kugel (links) und Befestigung an den Metallstangen (Mitte und rechts)

### 3.1.2 Sensor-Kugel und Startmechanismus

Die mittlere Kugel der Kugelstoß-Pendelkette ist die Sensorkugel, vgl. Abb. 9. Mit ihr wird der beim Stoß erzeugte mechanische Druckpuls elektrisch registriert. Diese Registrierung geschieht mithilfe eines scheibenförmigen Piezoelements, das mitten in der Kugel so montiert ist, dass seine Stirnflächen normal zur Stoßrichtung stehen. Piezo-Elemente haben nämlich die Eigenschaft, dass sie bei Verformung durch äußere mechanische Krafteinwirkung eine elektrische Spannung erzeugen.

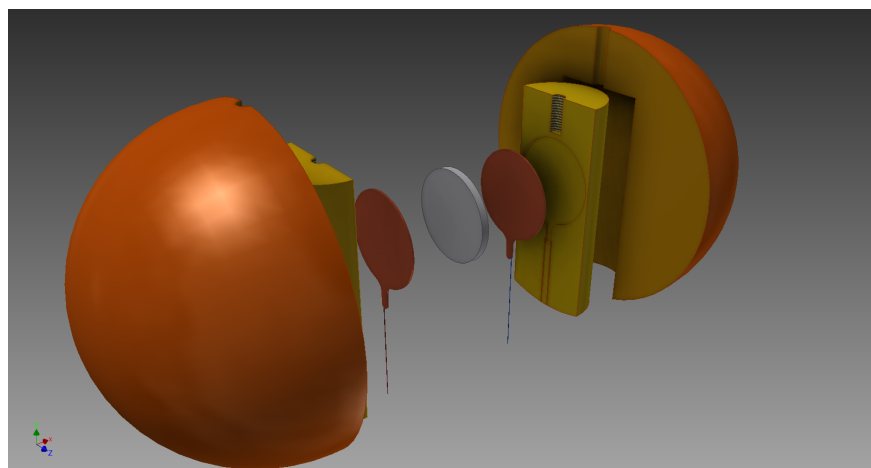


Abbildung 9: Explosionszeichnung Sensorkugel

Aus der Sensorkugel wurde von unten ein Zylinder herausgebohrt. Eine weitere Kugel wurde komplett so zerspannt, dass ein länglicher quaderförmiger Körper übrig blieb, der längsmittig geteilt wurde. Anschließend wurden Vertiefungen für Piezoscheibe und Zuleitungen eingefräst und das Werkstück so rundgedreht, dass es genau in die ausgebohrte Kugel passt. Die Piezo-Scheibe wird von zwei Kupferplättchen umschlossen, die als Spannungsabgreifer fungieren; sie sind mit Silberleitkleber an die Piezoscheibe geklebt und mit zwei dünnen Kabeln verbunden, die durch den inneren Zylinder nach außen hin führen. Somit kann die vom Piezoelement generierte Spannung mit einem Digitalwandler (CASSY) registriert und vom Speicher im PC erfasst werden. Die Zuleitungen brauchen nicht abgeschirmt zu werden, da die gemessenen Signale (typische Dauer  $10^{-4}s$ ) in einem anderen Zeitfenster liegen als die Schwingungsdauer der Netzfrequenz (50 Hz).

Da die Reproduzierbarkeit ein wichtiger Indikator für eine gute Messung ist, müssen die stoßenden Kugeln gut definiert ausgelenkt werden können. Dazu wurde ein Startmechanismus gebaut, der aus acht Bauteilen besteht (Abb.10). Der Unterbau besteht aus zwei massiven Metall-Standblöcken. Auf diesen sind zwei parallele Stangen mithilfe von zwei Stangenhaltern montiert. Die Stangen dienen als Führung für den Auslenkschlitten. Auf ihm sind Hubmagnete montiert, auf deren Achse jeweils ein Stößel sitzt; mit den Stößeln (konkave Einsenkung) kann eine Kugel am Äquator durch Klemmung definiert ausgelenkt werden. Wenn man den Hubmotoren-Stromkreis per Schalter unterbricht, springen die Stößel in ihre alte Position (geringe Auslenkung) zurück und die zuvor fixierte Kugel startet.

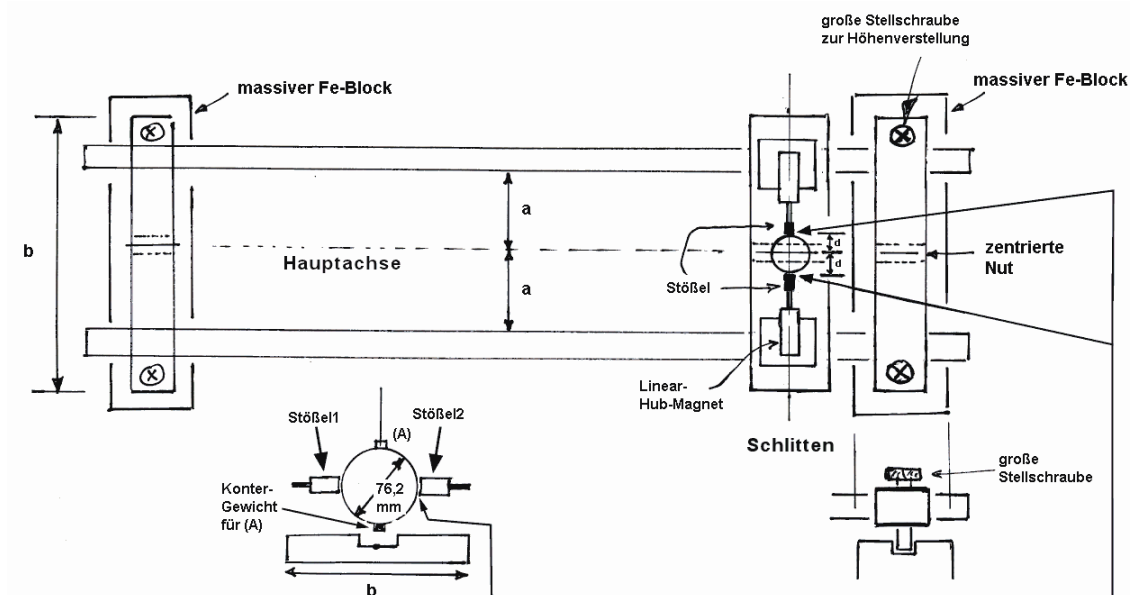


Abbildung 10: Startmechanismus

### 3.2 Zur Justage der Anordnung

Die beiden Metallstangen, an denen die oberen Halterungen der Kugelfäden befestigt sind, wurden mit einer präzisen Wasserwaage horizontalisiert. Ein Laserstrahl ist mit Hilfe von Schlauchwaage und Lotfäden so justiert worden, dass er die Gerade definiert, auf der später die Kugelmittelpunkte liegen. Die Kugel ist dann richtig positioniert, wenn die Achse des reflektierten, aufgeweiteten Lichtkegels mit dem einfallenden Laserstrahl zusammenfällt. Dies wurde mit einer „Irisblende mit Zielscheibe“ kontrolliert. Schließlich berühren sich alle Kugeln nahezu mathematisch. Anschließend wird der Startmechanismus (Abb.10) in den Aufbau integriert und die Hauptachse (zentrierte Nut links und rechts) m.H. zweier Senkbleikörper ausgerichtet. Ist der Startmechanismus sorgfältig justiert, dann hat man eine sehr genaue Endkontrolle für die Kugelpositionen, wenn man den „Schlitten“ längs der Kette bewegt; die Stößel müssen auf beiden Seiten immer denselben Abstand zum Kugeläquator haben.

## 4 Experimentelle Untersuchungen

### 4.1 Messung der Elastizitätskonstanten für das Kugelmaterail Aramith

Um unsere Messergebnisse mit der Hertzschen Kontakttheorie vergleichen zu können, werden die Materialeigenschaften der Kugeln benötigt. Deren Masse und Radius lassen sich durch Wiegen bzw. Ausmessen bestimmen. Der Schermodul  $G$  wurde mit Hilfe eines Torsionsapparates über die Verdrillung eines schmalen Aramith-Zylinders sowohl statisch (Abb.11(a)), als auch dynamisch (Abb.11(b)) bestimmt.

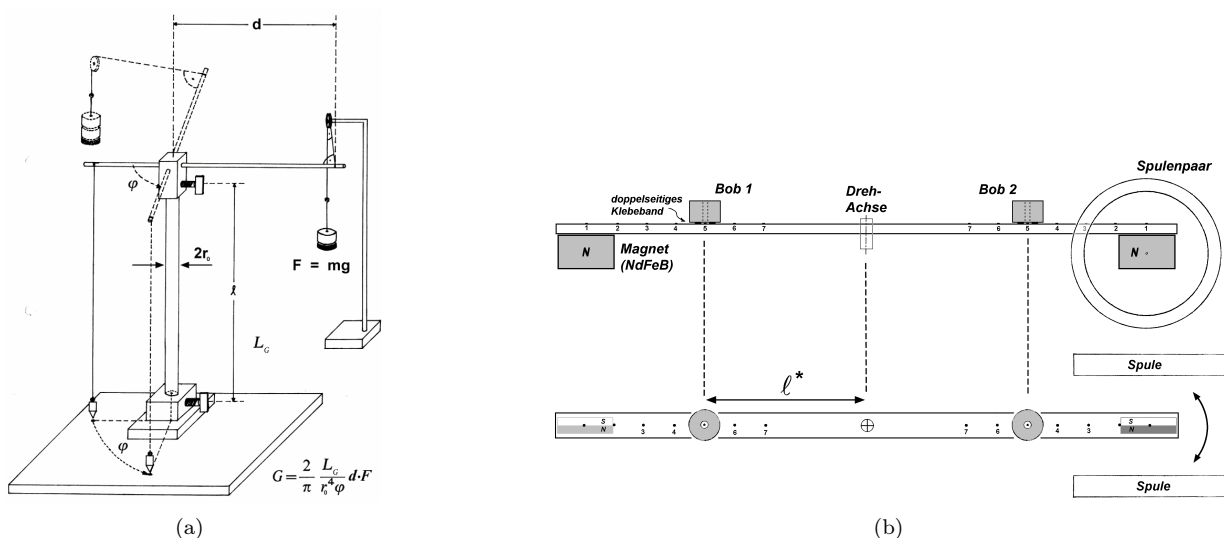


Abbildung 11: Versuchsaufbau zur statischen (a) und dynamischen (b) Bestimmung des Schermoduls  $G$

Für das Richtmoment  $D^*$  eines Aramith-Stabs wurde statisch  $D_{stat}^* = 3,48 \text{ Nm/rad}$  und dynamisch  $D_{dyn}^* = 3,92 \text{ Nm/rad}$  gemessen, vgl. Abb. 12 (a) und (b).

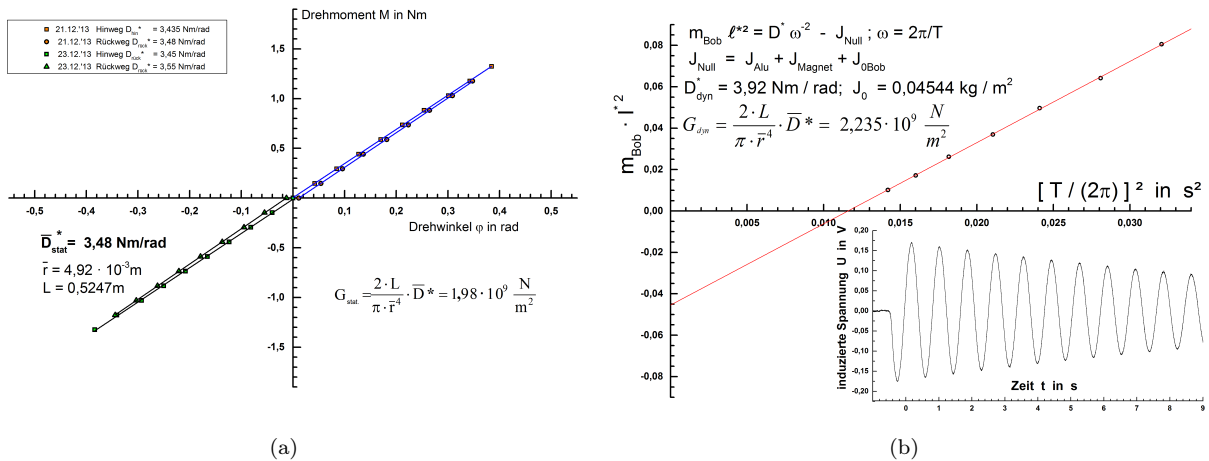


Abbildung 12: Auswertung zur statischen (a) und dynamischen (b) Bestimmung des Schermoduls  $G$

Der Durchmesser  $2r_0$  des Aramith-Zylinders wurde an 10 verschiedenen Stellen ausgemessen:  $\bar{r}_0 = 4,92 \text{ mm}$ . Wegen  $G = 2L_G \cdot D^*/(\pi \cdot r_0^4)$ , (vgl. [13], S.237f.) ist dann  $G_{stat} = 1,98 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Für die dynamische Bestimmung von  $G$  gelten die Drehmomentbeziehungen  $M = -D^* \varphi$  und  $M = J \ddot{\varphi}$ , woraus  $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$  folgt, mit  $\omega^2 = D^*/J$ .

Für das Trägheitsmoment  $J$  gilt hier:  $J = 2m_{Bob} \cdot \ell^{*2} + J_0$  wobei  $\ell^*$  der Abstand der Bobs zur Drehachse ist. Aus Abb. 12(b) entnimmt man  $G_{dyn} = 2,23 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Insgesamt haben wir also:  $G_{exp} = 2,105 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ . Die Querkontraktionszahl  $\mu$  bestimmen wir über die Beziehung  $\mu = \frac{E}{2G} - 1$ ; dazu wurde der Youngsche Elastizitätsmodul  $E$  durch Biegen eines dünnen Aramith-Zylinders bestimmt, vgl. Abb. 13.

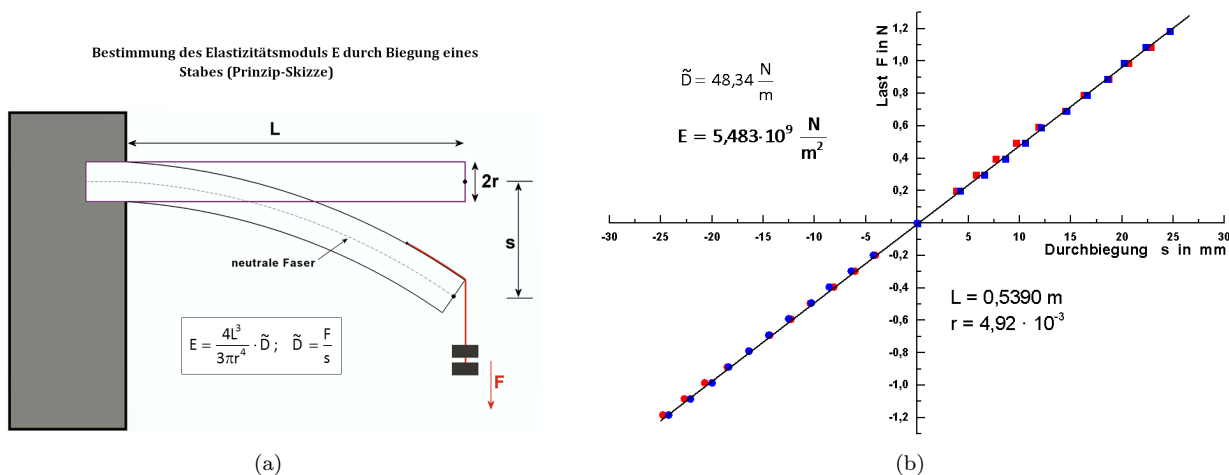


Abbildung 13: Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls. (a) Prinzipskizze, (b) Auswertung

Aus der Durchbiegung lässt sich der Elastizitätsmodul ausrechnen, ([13] S.378-381).

Wir erhalten  $E = 5,483 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ .

Die Querkontraktionszahl  $\mu$  haben wir nur aus den statisch ermittelten Werten für  $E$  und  $G$  bestimmt, da sich dann in der Beziehung  $\mu = (0,5E/G) - 1$  die unsichere Größe  $r_0^4$  (kleiner Wert, vierte Potenz) herauskürzt.

$\mu_{stat} = 1/2 \cdot (4L_E^3 \tilde{D}) / (3\pi r_0^4) \cdot (\pi r_0^4) / (2L_G D^*) - 1 = (L_E^3 \tilde{D}) / (3L_G D^*) - 1$ , also  $\mu_{exp} = 0,382$ .

## 4.2 Zur gemessenen Pulsform

Wenn man auf die Sensor-Kugel (Kugel Nr.5) die rechts benachbarte Kugel Nr.4 treffen lässt, dann registriert man ein Signal der Form, die Abb. 14(a) zeigt. Die Gestalt des Signals entspricht einer Hochpass-Filterung durch einen RC-Filter, vgl. Abb. 14(b). Die Piezoscheibe wirkt als Kondensator C und der Analog-Digital-Wandler (CASSY) als Widerstand R, [14].

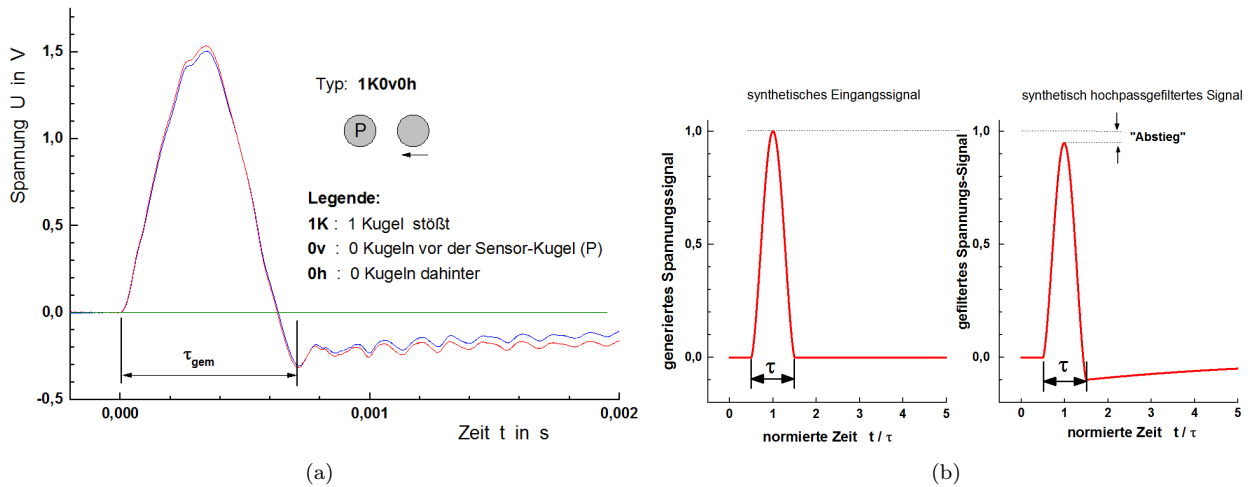


Abbildung 14: (a) Von der Piezo-Scheibe erzeugtes Spannungssignal, nachdem die Sensor-Kugel von einer benachbarten Kugel getroffen wurde; (b) Erklärung der Pulsform als Hochpassfilterung und des absteigenden Verlaufs der Maxima bei einer Pulsfolge.

Wir untersuchen nun, ob die gemessene Pulsbreite  $\tau_{gem}$  tatsächlich übereinstimmt mit der Hertzschen Stoßdauer  $\tau_{Hertz}$ , wie man sie nach Gleichung (15) erwartet. Wir lassen dazu die zur Sensorkugel rechts benachbarte Kugel Nr.4 mit unterschiedlicher Aufprallgeschwindigkeit  $v_0$  auf die Sensorkugel treffen und registrieren das dabei produzierte Signal. Solche Signale vom Typ 1K0v0h, (eine Kugel trifft auf die Kette, in der vor und hinter der Sensor-Kugel keine Kugel ist), zeigen die folgenden zwei Diagramme.

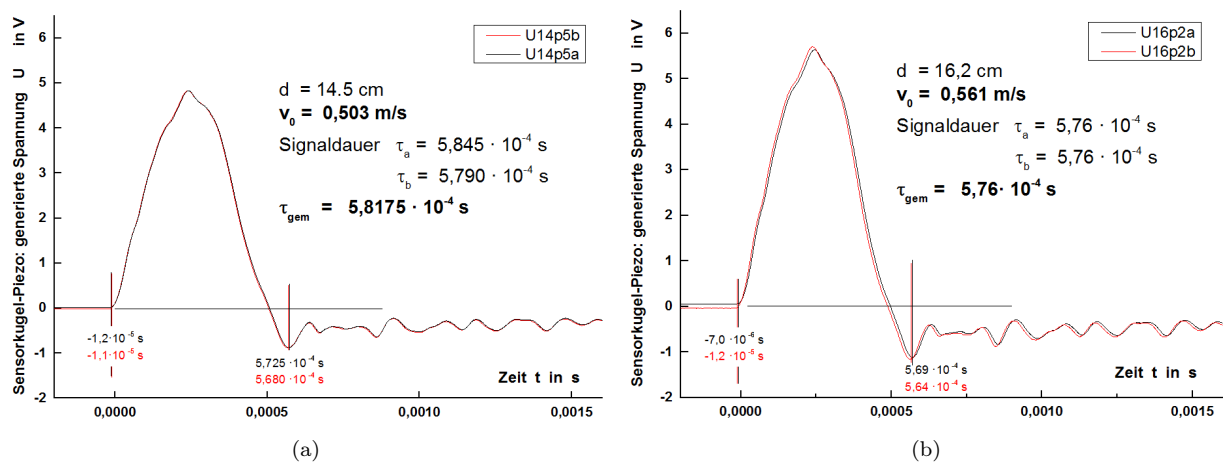


Abbildung 15: Mit zunehmender Aufprallgeschwindigkeit  $v_0$  nimmt die Signallänge zu und die gemessene Pulsdauer  $\tau_{gem}$  nimmt ab.

### 4.2.1 Bestimmung der Aufprallgeschwindigkeit $v_0$

Für die Bestimmung der Stoßdauer nach Hertz muss die Aufprallgeschwindigkeit  $v_0$  bekannt sein. Man ermittelt diese über den Energiesatz nach vorheriger Bestimmung der Auslenkhöhe  $h$ :  $v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ . Die sehr kleine Höhe  $h$  kann nicht durch direktes Messen bestimmt werden. Sie wird über die gut messbaren Größen  $L^*$  und  $d$  bestimmt, (Abb. 16). Hieraus folgt der Auslenkwinkel  $\varphi = \arctan(\frac{d}{L^*})$  und schließlich:  $h = L \cdot (1 - \cos \varphi)$ . Die Pendellänge  $L$  wurde über die Schwingungsdauer bestimmt:  $L = \frac{T^2 \cdot g}{(2 \cdot \pi)^2}$ .

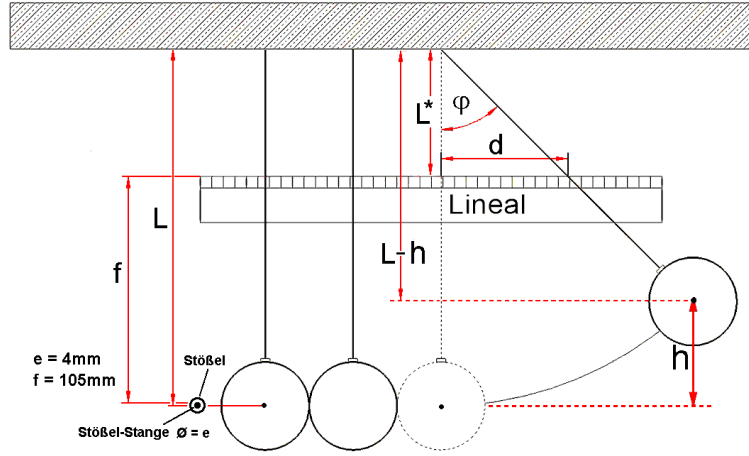


Abbildung 16: Auslenkhöhe h

#### 4.2.2 Ist das gemessene Signal ein Hertz-Puls?

Es wurde nun entsprechend Abb. 15 für acht verschiedene Pendelauslenkungen  $d$  die Pulsdauer  $\tau_{gem}$  experimentell ermittelt und die jeweilige Aufprallgeschwindigkeit  $v_0$  nach Abb. 16 bestimmt. Entsprechend der Gleichung (15) ist in Abb. 17 die Pulsdauer  $\tau_{gem}$  gegenüber  $v_0^{-0,2}$  aufgetragen. Setzt man in Gleichung (15) den Wert für  $\xi_{max}$  ein, Gl.(13), dann erhält man eine Gleichung der Form  $\tau_{Hertz} = K^* \cdot v_0^{-0,2}$  wobei  $K^* = 0,5\eta \cdot \sqrt[5]{\left(15m \cdot \frac{1-\mu}{G}\right)^2 \cdot \frac{2}{R}}$  ist. Wenn  $K^*$  mit  $K^*_{exp}$  übereinstimmt, dann ist die gemessene Pulsdauer  $\tau_{gem}$  gleich der Stoßdauer  $\tau$  der Kugeln nach Hertz. Wir überprüfen dies, indem wir den experimentell ermittelten Wert  $K^*_{exp}$  in die letzte Gleichung für  $K^*$  einsetzen und nach  $\frac{1-\mu}{G}$  hin umstellen.

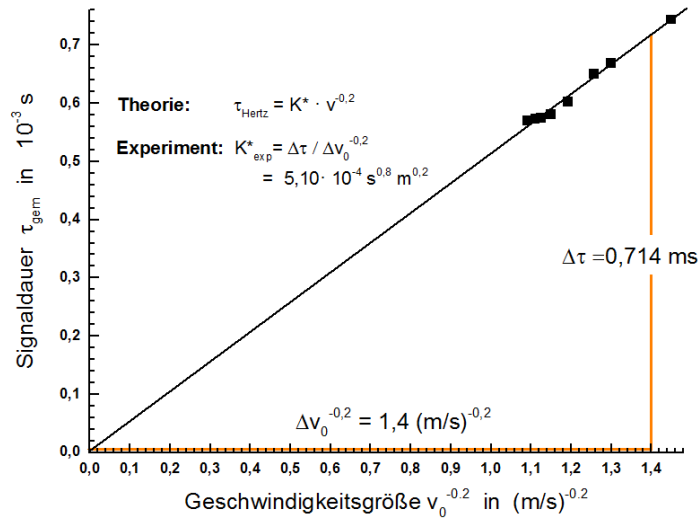


Abbildung 17: Auswertung der Stoßreihe 1k0v0h mit unterschiedlichen Anfangsauslenkungen

Die Kugelmasse beträgt  $m = 0,40478$  kg. Der Kugelradius ist  $R = 0,0381$  m. Mit  $K^*_{exp} = 2,10 \cdot 10^{-4} s^{0,8} m^{0,2}$  ist dann wegen  $\eta = 1,4716$

$$\left(\frac{1-\mu}{G}\right)_{Hertz} = 2,875 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N}.$$

In Kap. 4.1 haben wir  $G_{exp} = 2,105 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$  und  $\mu_{exp} = 0,382$  gefunden, also ist

$$\left(\frac{1-\mu}{G}\right)_{exp} = 2,936 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N}.$$

Beide Werte stimmen gut miteinander überein, (Abweichung  $\approx -2\%$ ), die gemessene Signaldauer kann also als Hertzsche Stoßdauer angesehen werden  $\tau_{gem} = \tau_{Hertz}$ .



## 5 Hertz-Pulse in der Kugelkette

### 5.1 Messung der Hertz-Pulse

Wir haben Kugelgruppen von 2, 3 und 4 Kugeln jeweils auf die Kette treffen lassen. In unserer Bezeichnungsweise waren das die Versuche: 2k0v2h, 3k0v3h, 4k0v4h. Das Ergebnis des letzten Versuchs zeigt Abb. 18. Dabei ordnen wir jeweils gleich viele Kugeln vor der Sensorkugel wie hinter der Sensorkugel an. Die folgende Abbildung zeigt die Hertz-Pulse, wenn vier Kugeln direkt auf die Sensorkugel treffen.

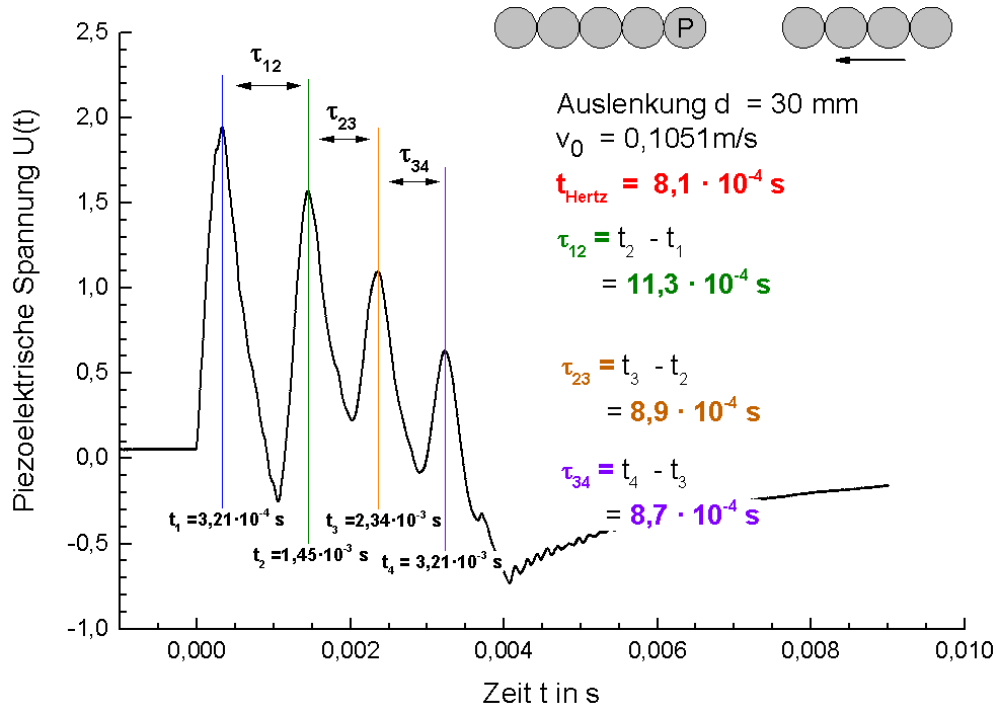


Abbildung 18: Registrierung der Hertz-Pulse mit 4 stoßenden Kugeln

Die gemessenen Peaks liegen nahezu äquidistant, die Abweichungen führen wir auf eine nicht ganz exakte Justierung zurück.

### 5.2 Zum Kugelkettenmechanismus

Unserer Ansicht nach läuft der Kugelkettenmechanismus beispielsweise so ab, (vgl. Abb. 19): Neun Kugelpendel (9; 8; ... ; 1) gleicher Pendellänge  $L$ , aus gleichem Material und mit gleichem Radius  $R$  sind bifilar so aufgehängt, dass sie sich in Ruhe nahezu mathematisch berühren, wobei die Kugelmittelpunkte alle auf einer Geraden liegen, die in der Symmetrie-Ebene der bifilaren Aufhängung liegt. An einem Ende werden nun vier Kugeln (4; 3; 2; 1) um denselben Winkel ausgelenkt, sie berühren sich also auch in der ausgelenkten Position, allerdings nicht am Äquator. Gibt man die ausgelenkte Kugelgruppe frei, dann bewegt sie sich auf ihre „alte Position“ in der Kugelkette zu. Dabei rutschen die Kugeln in ständigem Kontakt aneinander ab (Energieverlust).

Kugel 4 bemerkt beim Stoßvorgang das Hindernis 5 und plattet sich dort, wie in Kap. 2.3 beschrieben ab. Diese Information breitet sich rückwärts mit der Schallgeschwindigkeit durch die anderen Kugeln aus; ab dann, einige 1000stel Sekunden später, beginnt auch dort der Stoßprozess. Die Stoßdauer ist, wie schon Hertz bemerkt, ([2], S. 168), deutlich größer als die Zeit welche die Schallgeschwindigkeit  $c$  durch die Kugeln benötigt; wir haben für  $c$  etwa  $1750 \text{ m/s}$  gemessen. Die dabei an den Kontaktflächen erzeugten Druckpulse breiten sich in der Kontaktzone sehr langsam aus, entsprechend Autos, die mit geringer Geschwindigkeit durch eine Baustelle müssen und sich danach wieder viel schneller bewegen. So kommt es, dass sich die Druckpulse in einem richtig getakteten Abstand durch die Kette fortpflanzen, (vgl. Abb. 20). Der an der Kontaktstelle 4-5 erzeugte Druckpuls „wandert“ durch die Kette und trägt Kugel 9 fort. Der an der Kontaktstelle 3-4 generierte Puls trägt Kugel 8 im 1000stel Sekundenbereich später fort usw.. Für den Beobachter scheint dies gleichzeitig zu sein. Das wäre dann das „Geheimnis“. Wie in Kapitel 1.2 gezeigt, sind natürlich in der Hertzschen Kontaktmechanik Energie und Impuls erhalten.

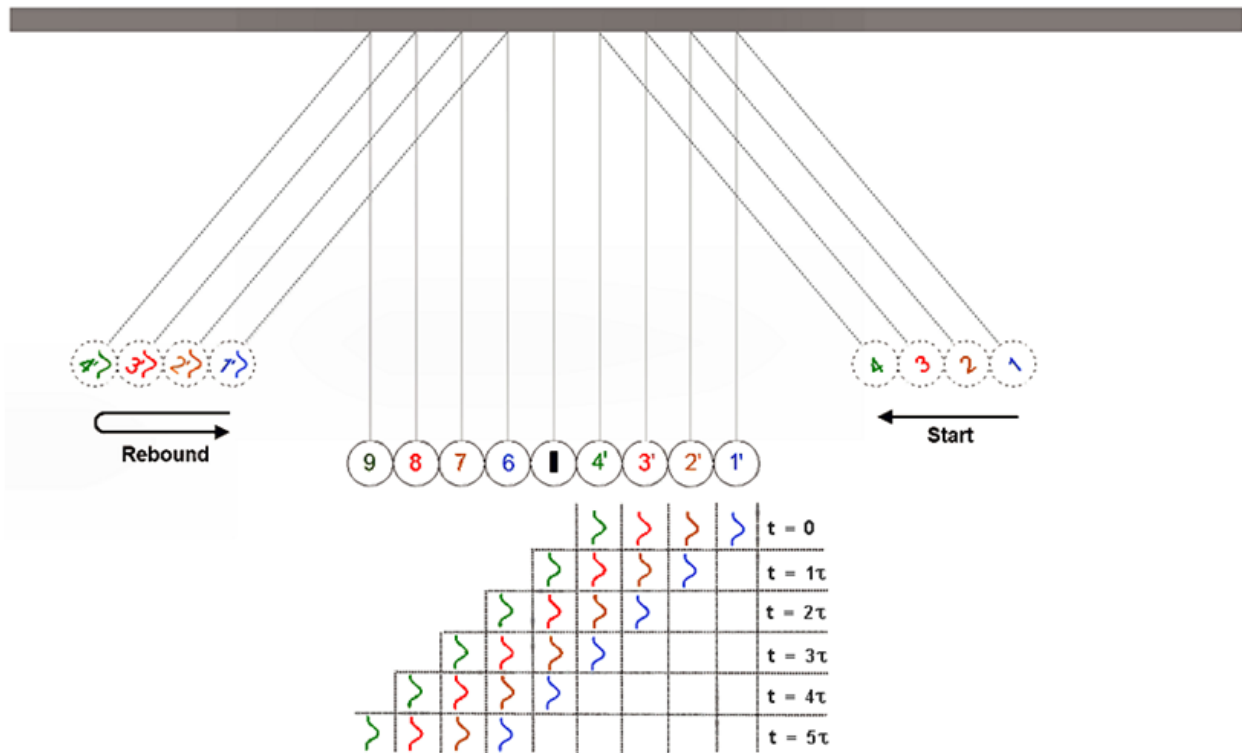


Abbildung 19: Fortpflanzung der Hertz-Pulse mit 4 stoßenden Kugeln durch die Kugelstoß-Pendelkette

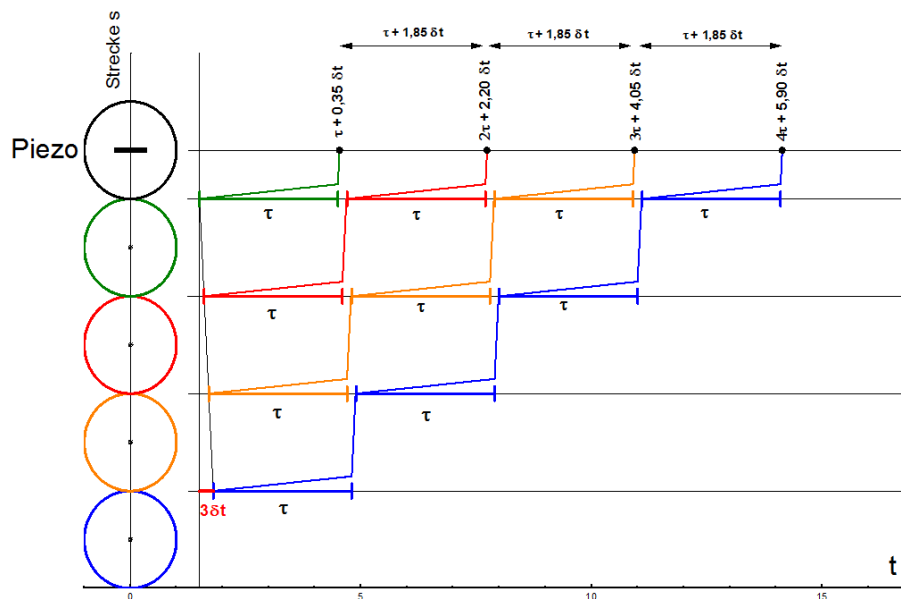


Abbildung 20: Registrierung der Hertz-Pulse am Piezo-Element bei vier anfänglich stoßenden Kugeln nach dem „Baustellen Modell“

## 6 Dispersion

Unserer Meinung nach kann die Kette im Prinzip nie sehr lange „funktionieren“, weil man schon bei einer auflaufenden Kugel folgendes beobachtet: Der durch die Kette hindurchgehende Puls nimmt an Pulshöhe ab und wird breiter, wie es die Abbildung 21 zeigt.

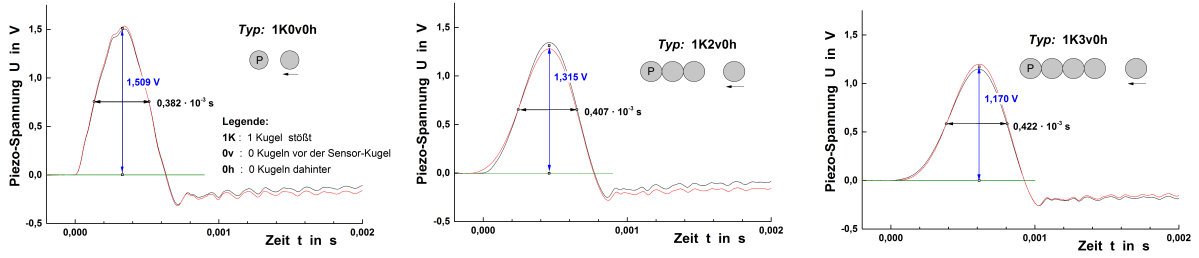


Abbildung 21: Das Signal zerfließt beim Durchgang durch die Kette. Bei Verwendung von Stahlkugeln ist der Effekt wahrscheinlich kleiner, vgl. Herrmann und Seitz ([3], Fig. 4c).

Warum die Kette trotzdem eine längere Zeitlang gut funktioniert, ist sehr schön zu sehen im Kugelstoß-Pendelketten-Video mit einer stoßenden Kugel vom Technikum Winterthur, [15]. Darin ist zu beobachten, dass die Kugeln nach dem Durchgang des Pulses alle voneinander getrennt sind und kurz darauf alle in ihrer jeweiligen Maximalauslenkung zur Ruhe kommen. Daher sind alle Pendelkörper wieder zusammen wenn die zurückschwingende Kugel (Rebound) wieder auf die Kette trifft. Die Pendel sind dann zwar alle wieder zusammen, ruhen aber nicht. Deswegen gerät die Kette immer mehr aus dem ursprünglichen symmetrischen Zustand in Unordnung, um schließlich wieder in einen anderen symmetrischen Zustand überzugehen, in dem benachbarte Kugeln ständig aneinander sind und die Kette gleichmäßig hin- und herpendelt.

## 7 Fehlerbetrachtung

Abschließend folgt eine Fehlerbetrachtung für die Stoßdauer  $\tau$ , da eine einfache Fehlerrechnung über den relativen Fehler  $1 - \frac{\tau_{\text{gemessen}}}{\tau_{\text{Hertz}}}$  die Gefahr beinhaltet, dass sich Fehler gegeneinander auslöschen. Deshalb wird die Fehlerfortpflanzung nun einzeln betrachtet, wobei es sich um Abschätzungen des größten Fehlers der einzelnen Komponenten handelt:

$$\tau = 0,5 \cdot \eta \sqrt[5]{\left(\frac{15 \cdot m(1-\mu)}{G}\right)^2 \cdot \frac{2}{R \cdot v_0}} \quad (16)$$

Es gilt:  $\eta = 1,47164$ ;  $m = 0,405 \pm 0,0005 \text{ kg}$ ;  $\mu = 0,382 \pm 0,005$ ;  $G = 2,107 \pm 0,15 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ;  $R = 3,81 \pm 0,005 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  und  $v_0 = 0,6 \pm 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Für das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz gilt:

$$\Delta\tau = \left|\frac{\delta\tau}{\delta m}\right| \cdot \Delta m + \left|\frac{\delta\tau}{\delta\mu}\right| \cdot \Delta\mu + \left|\frac{\delta\tau}{\delta G}\right| \cdot \Delta G + \left|\frac{\delta\tau}{\delta R}\right| \cdot \Delta R + \left|\frac{\delta\tau}{\delta v_0}\right| \cdot \Delta v_0 \quad (17)$$

Vereinfacht:

$$\Delta\tau = \frac{\tau}{5} \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta\mu}{1-\mu} + 2 \cdot \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta v_0}{v_0}\right) \quad (18)$$

Für uns bedeutet dass: Nach Abschätzung der größten maximalen Fehler, kann man nun die größte Abweichung  $\Delta\tau$  errechnen. Durch Einsetzen in Gl.(9) ergibt sich mit den oben notierten Werten eine Abweichung von:  $\Delta\tau = 7,859 \cdot 10^{-5}$  Sekunden. Über Gl.(7) ergibt sich für die Stoßdauer  $\tau = 5,8386 \cdot 10^{-4}$  Sekunden. Somit erhält man einen größtmöglichen Fehler von:

$$RF = 1 - \frac{5,8386 \cdot 10^{-4} \text{ s}}{5,8386 \cdot 10^{-4} \text{ s} + 7,859 \cdot 10^{-5} \text{ s}}, \quad (19)$$

also einen maximalen Fehler von  $\approx 12\text{Prozent}$ .

## 8 Schluss

Am Ende dieser Ausarbeitung nehmen wir Stellung zu den eingangs formulierten Zielen der Arbeit. Wir haben allgemein gezeigt, dass Energie- und Impuls-Erhaltung nicht ausreichen, um den Kugelkettenmechanismus zu erklären. Unsere Untersuchungen zeigen, dass die mit der Sensorkugel gemessenen Pulsdauern tatsächlich mit den von Hertz vorausgesagten Stoßdauern übereinstimmen; dazu wurden von uns die elastischen Konstanten des Kugelmaterials statisch und dynamisch gemessen. Wir haben die in einer theoretischen Untersuchung von Herrmann und Seitz vorausgesagten Hertz-Pulse, die durch eine Kugelkette „hindurchwandern“ und für den Kugelkettenmechanismus verantwortlich sind, direkt im Inneren einer Kugel nachgewiesen. Die durch unsere Messmethode bewirkte Signalform wurde analysiert, woher auch die absteigende Pulsfolge herrührt (Abb. 2 u. Abb. 14 (b)).

Während unserer gesamten Arbeit an diesem Thema: „Untersuchungen zur Kugelstoß-Pendelkette und zur Hertzschen Kontakt-Theorie“, lag die Herleitung von Hertz Kraftgesetz  $F \sim \xi^{1,5}$  außerhalb unseres mathematischen Können. Mit unserem 2D-Modell können wir Hertz in seiner Arbeit bis zu einem gewissen Punkt folgen. Der Versuch dieser modellhaften Beschreibung hat unseren Respekt vor der Leistung von Heinrich Hertz weiter wachsen lassen.

## 9 Quellenverzeichnis

- [1] Mariotte, E.: *Traité de la percussion ou choq des corps dans lequel les principales regles du mouvement sont expliquées, & démontrées par leurs veritable causes*, Impr. Royale Paris 1676
- [2] Hertz, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92 (1882), S. 156-171
- [3] Herrmann, F. und Seitz, M.: *How does the ball-chain work?*, American Journal of Physics **50**(1982), S. 977-981
- [4] Bergmann-Schaefer, *Lehrbuch zur Experimentalphysik*, Bd.1, Berlin/New York 1974
- [5] Offermann, V. Woessler, U. u. Thomas, W.: *Statische und dynamische Überprüfung der Hertzschen Theorie „Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte.“*. Ein Beitrag zum Wettbewerb „Jugend forscht“ 1984 im Fachbereich Physik (NRW), unveröffentlicht; vgl.: Arndt, U.: *Betreuung von Schülern bei der Vorbereitung auf den Wettbewerb „Jugend forscht“ – Ein Beispiel*, in: Wambach, H. u. Wagner, H. (Hrsg.): *Förderung von Jugendlichen in der Physik. Tagungsbericht mit zahlreichen Praxisbeispielen*, Bad Honnef 1994, S. 150 - 181
- [6] Payr, M.D.: *An Experimental and Theoretical Study of Perfect Multiple Contact Collisions in Linear Chains of Bodies*, Diss. ETH Zürich 2008
- [7] Arndt, U. und Offermann, V.: *Ein und zweidimensionaler Stoß mit Physik des Stoßvorgangs nach Heinrich Hertz*, Praxis der Naturwissenschaften. Physik, Ausgabe 8/34 (1985), S. 5-26
- [8] Santibanez, F., Munoz, R., Caussarieu, A. Job, S. u. Melo, F.: *Experimental evidence of solitary wave interaction in Hertzian chains*, arXiv:1102.3364v2 [cond-mat.other] 25 May 2011
- [9] Job, S., Melo, F., Sokolow, A. u. Sen, S.: *How Hertzian Solitary Waves Interact with Boundaries in a 1D Granular Medium*, Physical Review Letters **94** (2005), 178002-1 – 178002-4
- [10] Lovett, D. R., Moulding, K. M. u. Anketell-Jones, S.: *Collisions between elastic bodies: Newton's cradle*, European Journal of Physics **9** (1988), S. 323-328
- [11] WolframAlpha computational knowledge engine, (<http://www.wolframalpha.com/>)
- [12] Physikalisches Praktikum der Universität Hamburg, Versuchsbeschreibung M14.06 Kugelstoßreihe/Billardkugeln ([http://www.physnet.uni-hamburg.de/ex/html/versuche/mechanik/M14\\_06/index.html](http://www.physnet.uni-hamburg.de/ex/html/versuche/mechanik/M14_06/index.html))
- [13] Budo, A.: *Theoretische Mechanik*, 7. Aufl. Berlin 1974, S. 378-381
- [14] Persönliche Mitteilung von Herrn Prof. Dr. E. Wielandt, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart, wissenschaftlicher Pate unserer Schul-Erdbebenwarte
- [15] Kugelstoß-Pendelkette des ehemaligen Technikums Winterthur, (<http://www.youtube.com/watch?v=uXI09nkg7mA;systemdesignen.ch>)

## 10 Danksagung

Wir danken für...

### Beratung durch

*Herrn Prof. Dr. Erhard Wielandt*, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart für ausführliche Hinweise zur Signalanalyse

*Herrn Prof. Dr. Thomas Hebbeker*, Physikalisches Institut III (A) der RWTH Aachen für allgemeine Beratung zur Mechanik und für die Überholung der Kugelkette in der Instituts-Werkstatt (Mechanik)

*Herrn Mechaniker-Meister Josef Grooten*, Mechanische Werkstatt des Physikalischen Instituts III (A), für Beratung zu Details der Kugelkette und für die Neu-Anfertigung und Überarbeitung von Komponenten der Kette

*Frau Dipl.-Bibl. Irmgard Cleven*, Bibliothek der Physikalischen Institute RWTH Aachen, Beratung bei der Literatur-Recherche

*Herrn Rüdiger Eggerstorf*, Institut für Experimental-Physik der Universität Hamburg Physikpraktikum, für die Übermittlung von Fotos der Kugelkette der Universität Hamburg

die Regionalwettbewerbs-Jury, insbesondere *Herrn Dr. M. Gude*, Cologne Chip AG, für seine konstruktiv-kritischen Ratschläge, die uns bei der Überarbeitung der schriftlichen Fassung sehr geholfen haben.

### Unterstützung durch

*Fa. Additive*, Friedrichsdorf, insbesondere *Herrn Dipl.-Ing. Markus Höhnen* für Beratung (Datenverarbeitungsprogramm Origin)

*Fa. AS-Feinstseile*, Delmenhorst, insbesondere *Herrn Geschäftsführer Andreas Schmidt* für viele Meter Stahl-Feinstseile zum Aufhängen der Kugeln

*Fa. Castolin Eutectic*, Kriftel, insbesondere *Frau Katrin Kaestner*, für Weichlot zum Fixieren der Stahlseilenden

*Fa. Epoxy Produkte*, Absberg, insbesondere *Frau Heidi Speer-Sebold (Vertrieb)*, für Silberleitkleber zum Befestigen der Kontaktfolien an den Piezoscheiben

*Fa. Gutekunst*, Metzingen, insbesondere *Frau Delia Held (Verkaufsleitung)* für Druckfedern

*Fa. Kendrion-Kuhnke Automation*, Malente, insbesondere *Herrn Projektmanager Thorsten Grunwald* für vier neue Präzisions-Hubmagnete

*Fa. Leybold-Didactic*, Hürth, insbesondere *Herrn Dr. M. Hund*, *Herrn Dr. K.H. Wietzke* und *Herrn F. Kempas*, für die Leihgabe eines Messwertsystems Cassy 2

*Fa. Mobau Thelen*, Simmerath, insbesondere *Herrn Dipl.-Ing. Dietmar Thelen* für viele Schraubzwingen als Befestigungs-Elemente

*Fa. Myrenne*, Roetgen, insbesondere *Herrn Dipl.-Ing. Sebastian Staiger* und *Herrn Mechaniker-Meister Karl-Heinz Backes*, für technische Beratung und Bereitstellung einer Präzisions-Wasserwaage

*Fa. PI Ceramic*, Lederhose, insbesondere *Herrn Dipl.-Physiker Frank Möller* für die Bereitstellung von Piezo-Keramikscheiben als Haupt-Sensorelemente

*Fa. Saluc*, Callenelle (Belgien), insbesondere bei *Frau Katty Pottie (Vertrieb)*, Beratung beim Ankauf von Phenolharz-Kugeln und für die Zurverfügungstellung von Phenolharz-Zylindern.

*Fa. Schweizer Federntechnik*, Reutlingen (Mittelstadt), insbesondere *Herrn Frank Herrmann* für die kostenlose Überlassung von Druckfedern

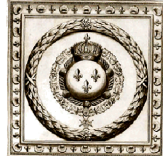
*Fa. Siebertz*, Simmerath-Kesternich, insbesondere *Herrn Schreinermeister Georg Siebertz* für die kostenlose Anfertigung einer massiven Grundplatte

*Fa. Weiss-Druck*, Monschau, insbesondere *Herrn Geschäftsführer Georg Weiss*, *Frau Beate Hamacher (Assistentin der Geschäftsleitung)* und *Herrn Abteilungsleiter Bernhard Roder* für die Anfertigung von großformatigen Farbpostern

Tafel I



RECUEIL  
DE PLUSIEURS TRAITÉZ  
DE MATHÉMATIQUE  
DE L'ACADEMIE ROYALE  
DES SCIENCES



A PARIS.  
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.  
M. DC. LXXXVI  
(1676)

Edme Mariotte (1620 – 1684)

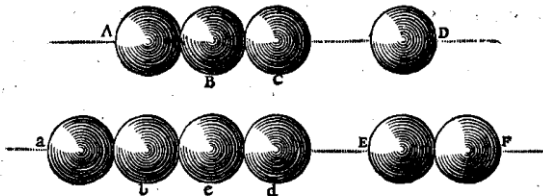
TRAITÉ  
DE LA PERCUSSION  
OU CHOQ DES CORPS

DANS LEQUEL LES PRINCIPALES REGLES  
du mouvement sont expliquées, & démontrées par leurs véritables causes.

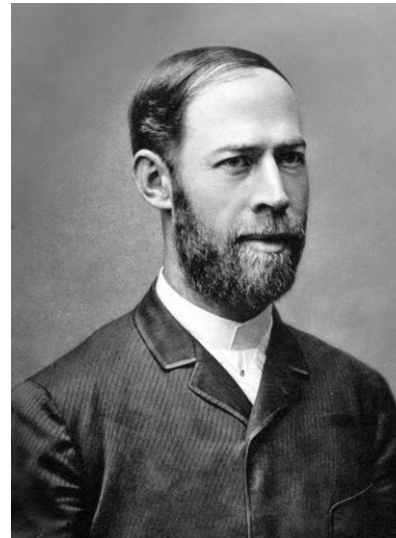
Par M. MARIOTTE.

PROPOSITION XXVIII.

SI trois boules d'ivoire, ou d'autre matière à ressort ferme, A, B, C, sont égales entre elles, & contiguës, & qu'une autre boule D de même matière & de même pesanteur, choque directement la boule C, selon la ligne A D qui passe par leurs centres



tres; les boules C & B demeureront en repos après le choq, & la boule D aussi, & la seule boule A s'avancera avec la même vitesse qu'avoit la boule D avant le choq, & quelque nombre de boules qu'il y ait de suite, soit deux, ou trois, ou quatre, &c. il n'y aura toujours que la plus éloignée qui se mettra en mouvement, si leurs centres sont en une même ligne droite.



Journal  
für die  
reine und angewandte Mathematik

Zweundneunzigster Band.  
In vier Heften.

Berlin, 1882

Heinrich Hertz (1857 – 1894)

Ueber die Berührung fester elastischer Körper.

(Von Herrn Heinrich Hertz.)

Man überzeugt sich leicht, dass das vorgelegte System von Verschiebungen den für  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  aufgestellten Differentialgleichungen genügt, und dass in der Unendlichkeit diese Verschiebungen verschwinden. Für die Componenten der Drucke erhalten wir:

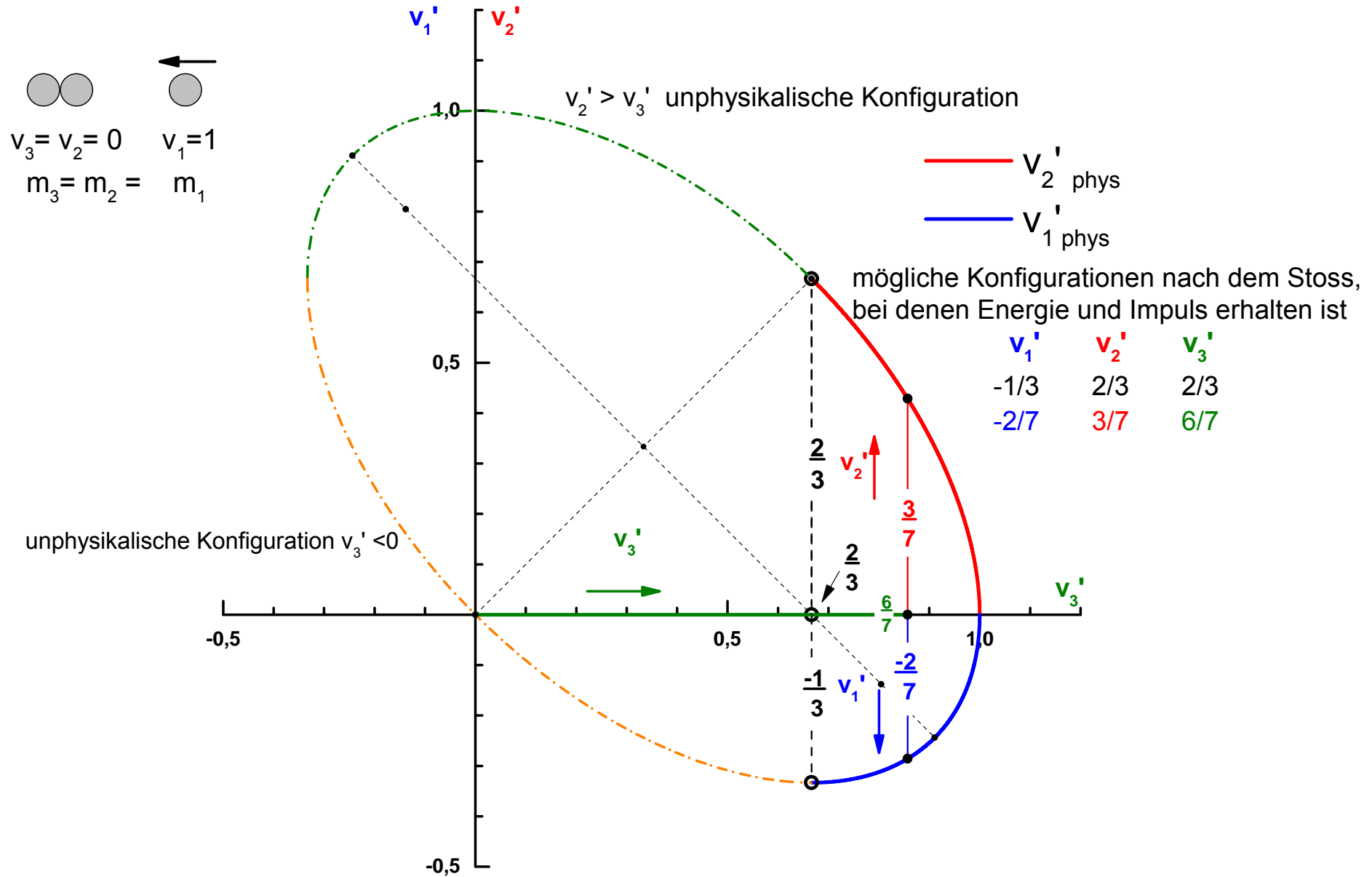
$$\begin{aligned} X_x &= -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} \right\}, & X_y &= -2K \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y}, \\ Y_y &= -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{2\theta}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} \right\}, & X_z &= -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z} + \vartheta \frac{\partial P}{\partial x} \right\} = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}, \\ Z_z &= -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{2(2+3\theta)}{K(1+2\theta)} \frac{\partial P}{\partial z} \right\}, & Y_z &= -2K \left\{ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z} + \vartheta \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = 2z \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

$$\alpha'^2 - \alpha_0'^2 + \frac{4}{3} k_1 k_2 \alpha'^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$p_m = k_2 \alpha_m^{\frac{3}{2}}$$



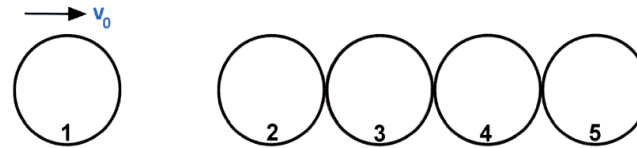
# Energie - und Impuls - Erhaltung allein können den Kugelketten-Mechanismus *nicht* erklären



# F. Herrmann und M. Seitz: How does the ball-chain work?

American Journal of Physics , Bd. 50, 1982, S. 977-981

$$F = Hx^\alpha$$



Simulations-Rechnung für  $\alpha = 1$       Simulations-Rechnung für  $\alpha = 1,5$

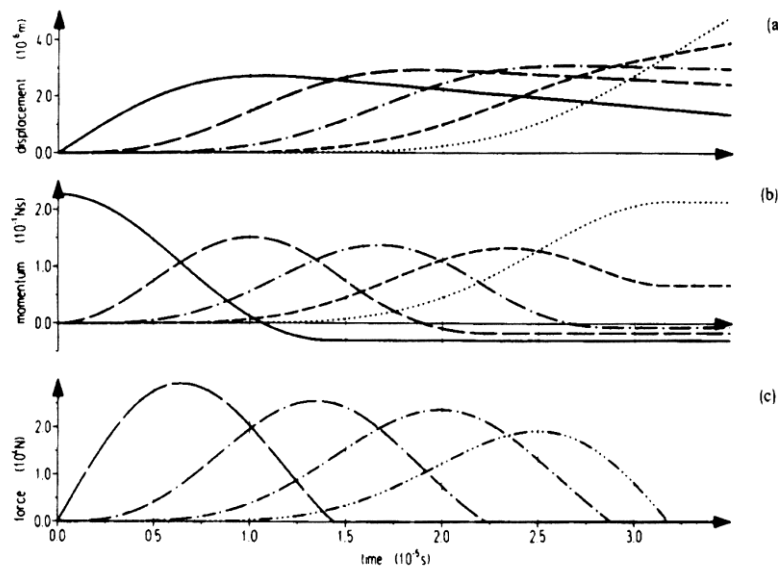


Fig. 3. Computer simulation of a collision experiment for one incoming ball colliding with 4 balls at rest. The exponent  $r$  in equation (3) is 1.0. (a) The displacement from equilibrium of each ball (upper plot) as a function of time. The first ball is the incoming ball. Legend: — (1st ball); - - - (2nd ball); - · - · - (3rd ball); - - - - (4th ball); ····· (5th ball). (b) The momentum of each ball (middle plot) as a function of time. (c) The force of one ball exerted on the next as a function of time. Legend: — (1st ball to 2nd); - - - (2nd ball to 3rd); - · - · - (3rd ball to 4th); - - - - (4th ball to 5th).

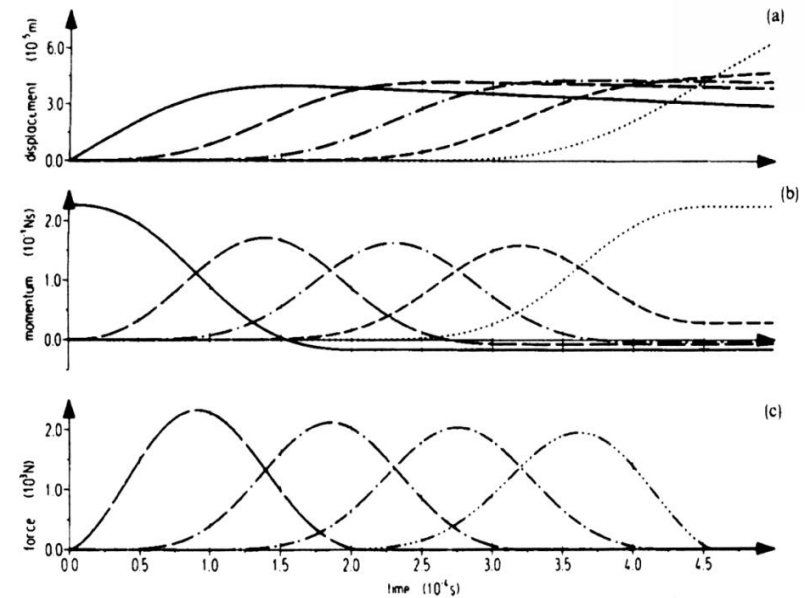
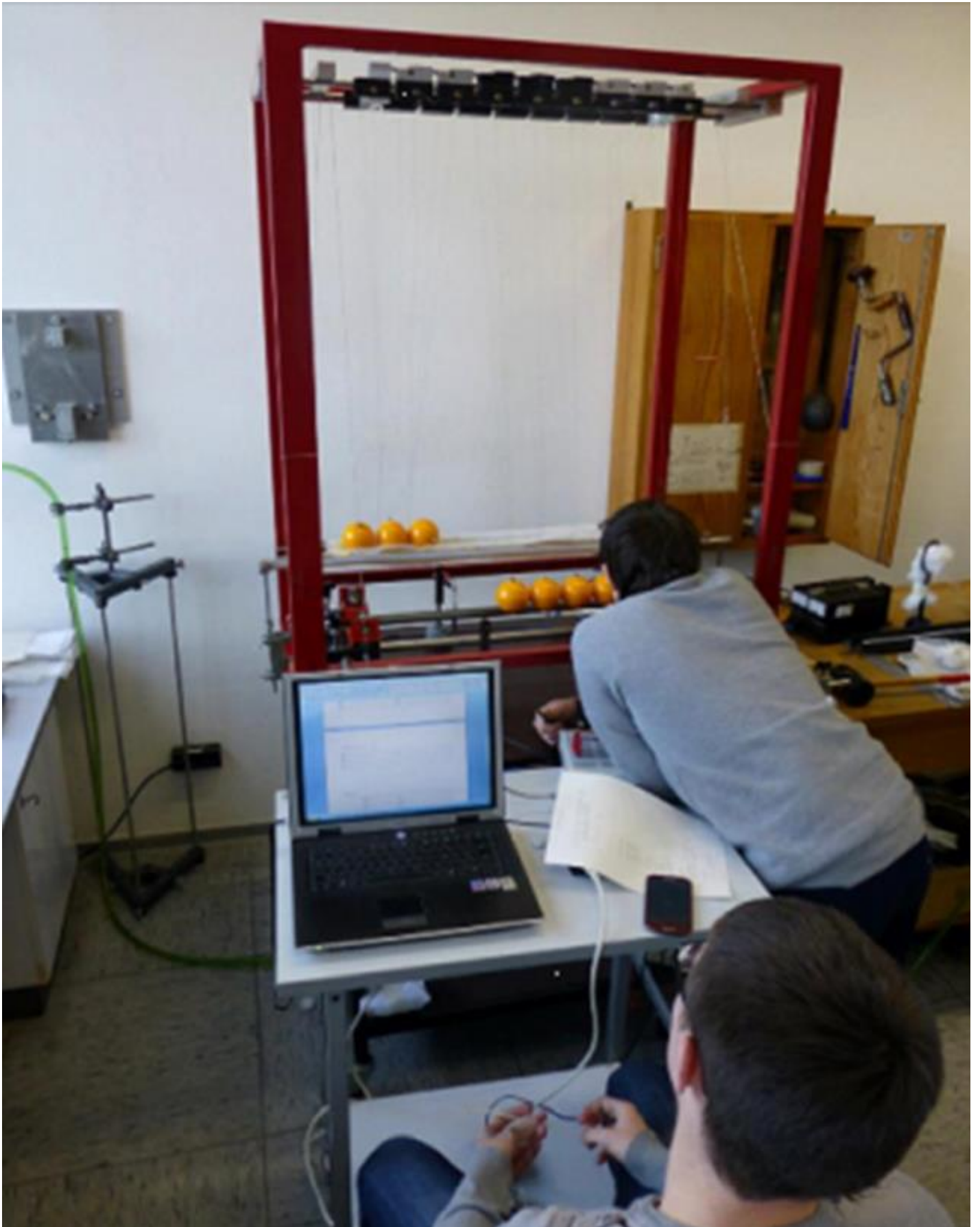


Fig. 4. Same as Fig. 3, except with  $r = 1.5$ .

979 Am. J. Phys., Vol. 50, No. 11, November 1982  
F. Herrmann and M. Seitz 979

**Die Simulation einer Kugelkette mit einer Luftkissenfahrbahn gelingt nicht.** (Herrmann u. Schmälze, *Simple explanation of a well-known collision experiment*, AmJPh 1981, S. 761)

## Messungen an der Kugeldette



## Tafel II

(1a)

### H. Hertz : Kontakt-Mechanik für zwei elastische Körper mindestens einer muss an der Kontaktstelle gewölbt sein

statische Pressung  $F = H \cdot \xi^{1,5}$

$$H = \frac{4}{3} \cdot \frac{G}{1-\mu} \cdot \sqrt{\frac{R}{2}}$$

$m = 0,4 \text{ kg}; R = 0,04\text{m}$

$G = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$

$\mu = 0,4$

$H = 6,3 \cdot 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^{0,5} \text{s}^2}$

von außen  
aufgebrachte Kraft  $-F$

**Beispiel:**

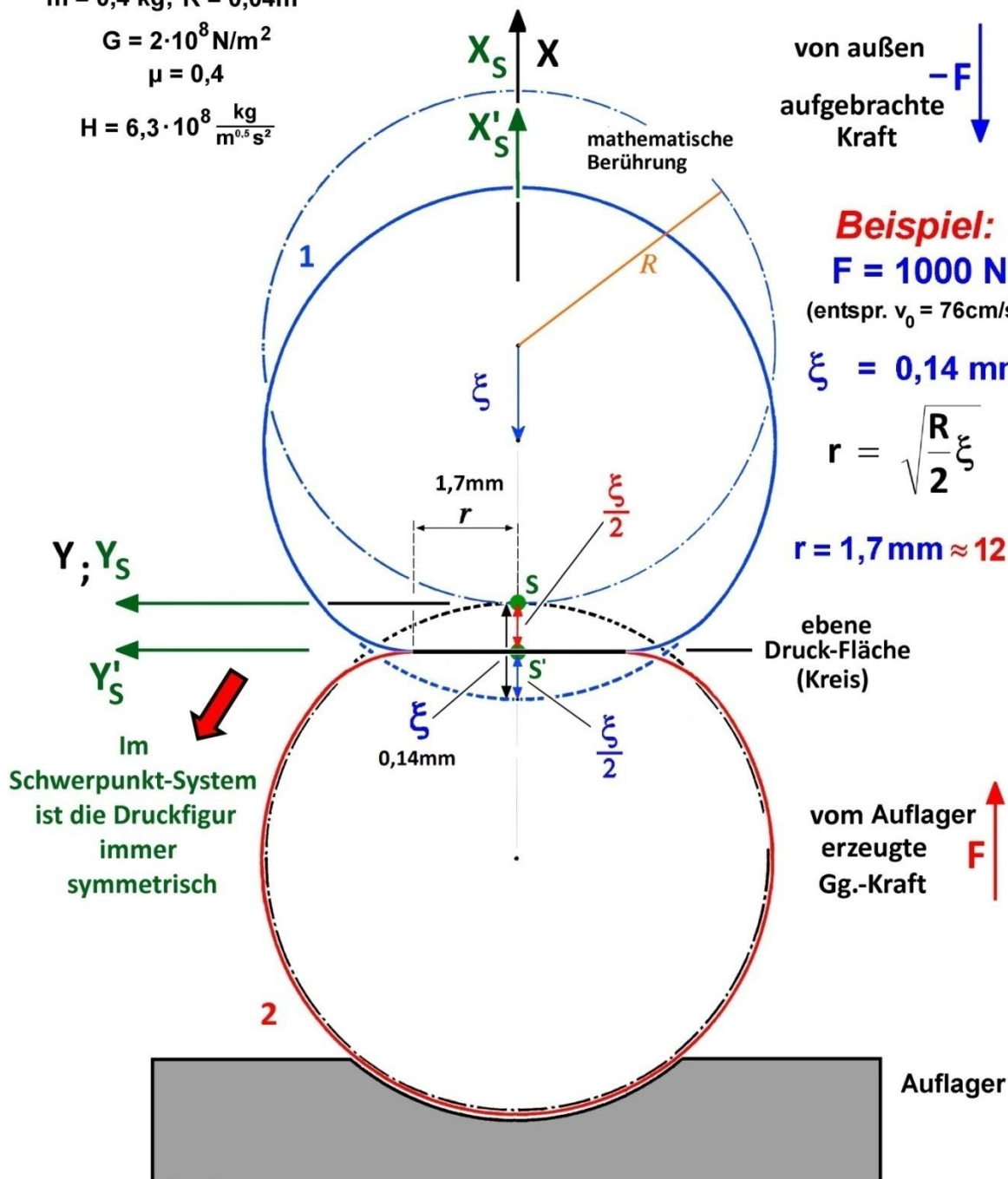
$F = 1000 \text{ N}$

(entspr.  $v_0 = 76\text{cm/s}$ )

$\xi = 0,14 \text{ mm}$

$$r = \sqrt{\frac{R}{2} \xi}$$

$r = 1,7 \text{ mm} \approx 12 \xi$





(1c)

## Schritte zur Bestimmung von $\tau_{\text{Hertz}}$

**1. Hertz-Konstante H**  $= \frac{4}{3} \cdot \frac{G}{1-\mu} \cdot \sqrt{\frac{R}{2}} = 6,268 \cdot 10^8 \text{ kg}/(\text{m}^{0,5} \text{ s}^2)$

Schubmodul G:  $2,105 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$ ; Querkontraktion  $\mu$ : 0,382

## 2. Maximal-Abplattung

$$\xi_{\text{max}} = \sqrt[5]{\left(\frac{5}{8} \text{ m} \cdot \frac{v_0^2}{H}\right)^2} = 1,100 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Kugelmasse m: 0,40478 kg ; Aufprallgeschwindigkeit  $v_0 = 0,561 \text{ m/s}$

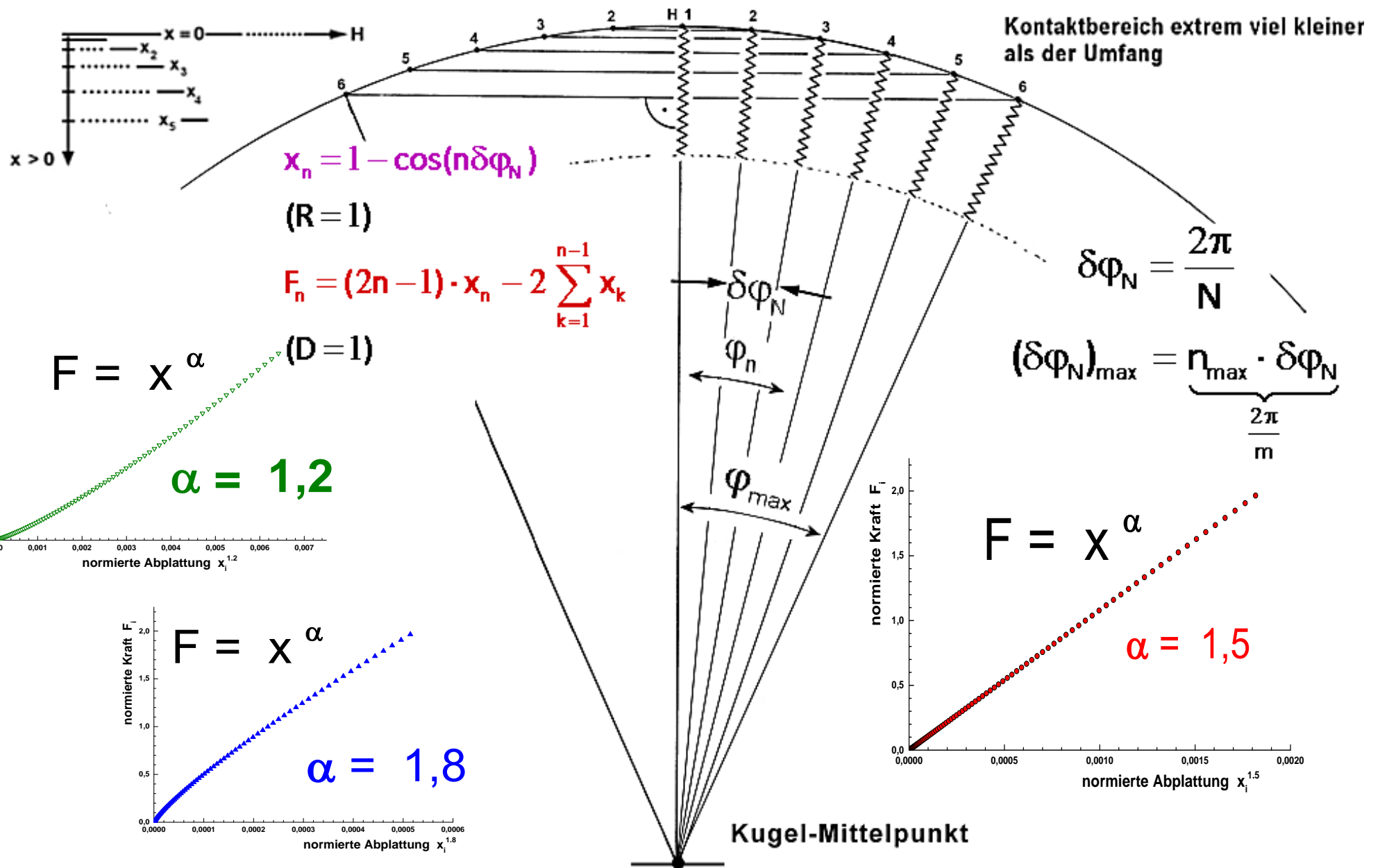
## 3. Stoßdauer:

$$\tau_{\text{Hertz}} = \frac{2 \eta \xi_{\text{max}}}{v_0} = 5,77 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$



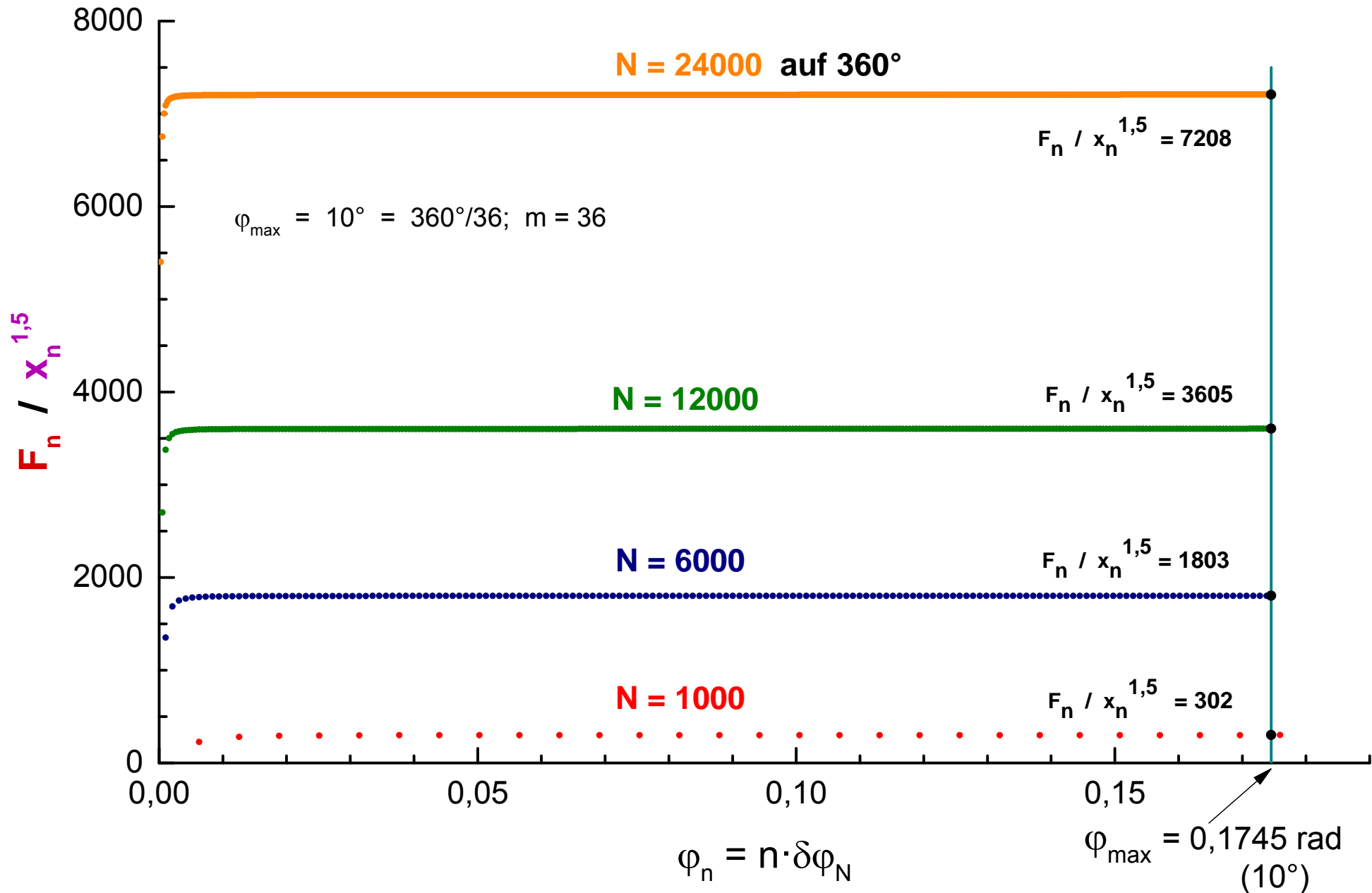
# Ein einfaches Modell für $F \sim x^{1,5}$

(2a)



(2b)

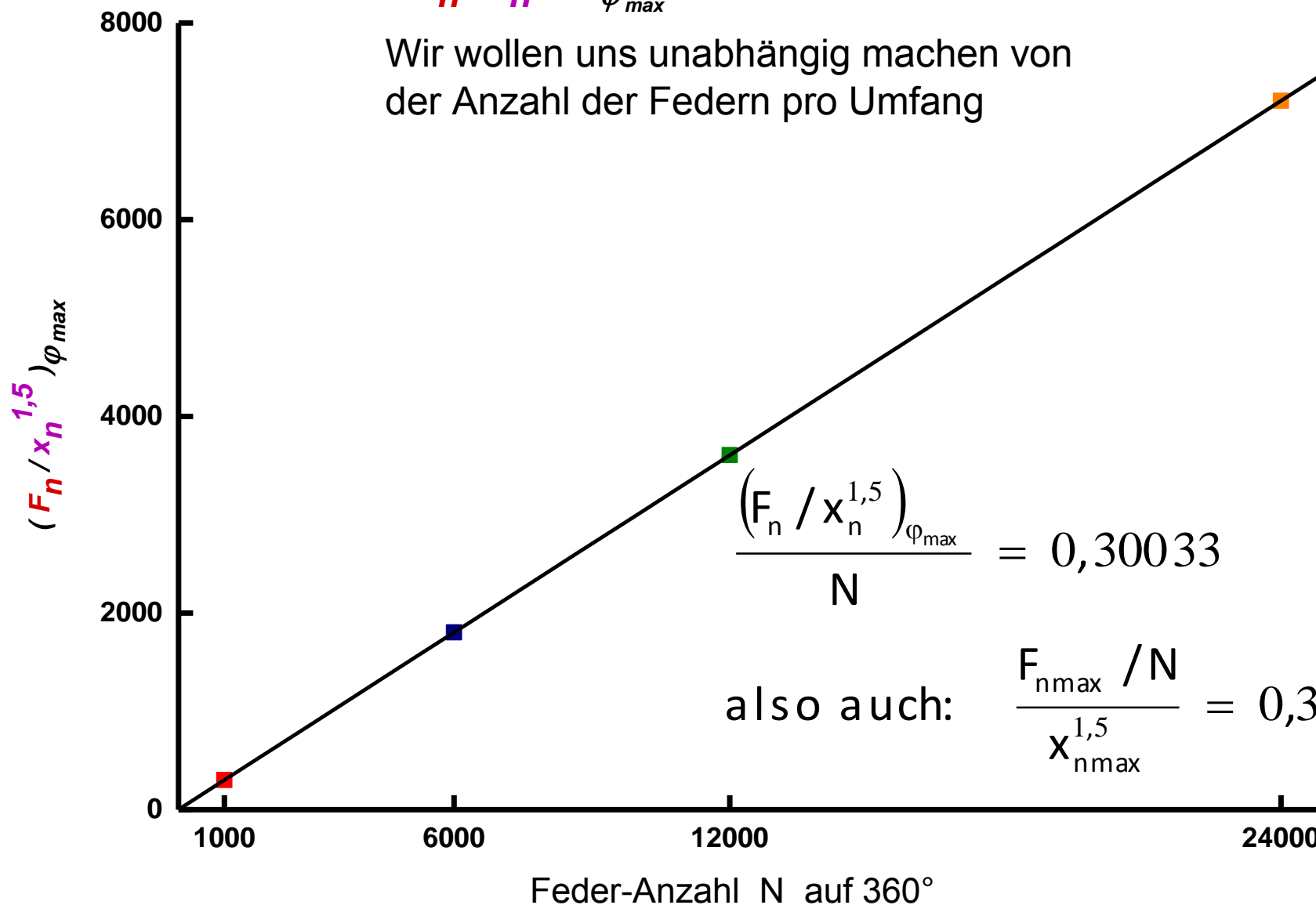
### Bestimmung der Konstanten $K_n$ für wachsende Federzahl $N$



(2c)

$(F_n / x_n^{1,5})_{\varphi_{\max}}$  für wachsende Federzahl  $N$

Wir wollen uns unabhängig machen von  
der Anzahl der Federn pro Umfang



## Theoretisches zum Federmodell – Wo ist die Zahl 0,30033 versteckt?

$$x \triangleq \xi \quad (x \text{ weil Modell}); \quad x_n = 1 - \cos(n\delta\varphi_N); \quad F_n = (2n-1) \cdot x_n - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k$$

$$0 < n \leq n_{\max} \quad \delta\varphi_N = \frac{2\pi}{N} \quad (N = \text{Federanzahl auf } 360^\circ)$$

mit Entwicklung des cos folgt (bei  $F_n$  für große  $n$ ):

$$x_n = \frac{(n\delta\varphi_N)^2}{2} \cdot \left[ 1 - \frac{(n\delta\varphi_N)^2}{12} \right]; \quad F_n = \frac{2}{3} \cdot n^3 \cdot (\delta\varphi_N)^2 \left[ 1 - \frac{1}{10} (n\delta\varphi_N)^2 \right]$$

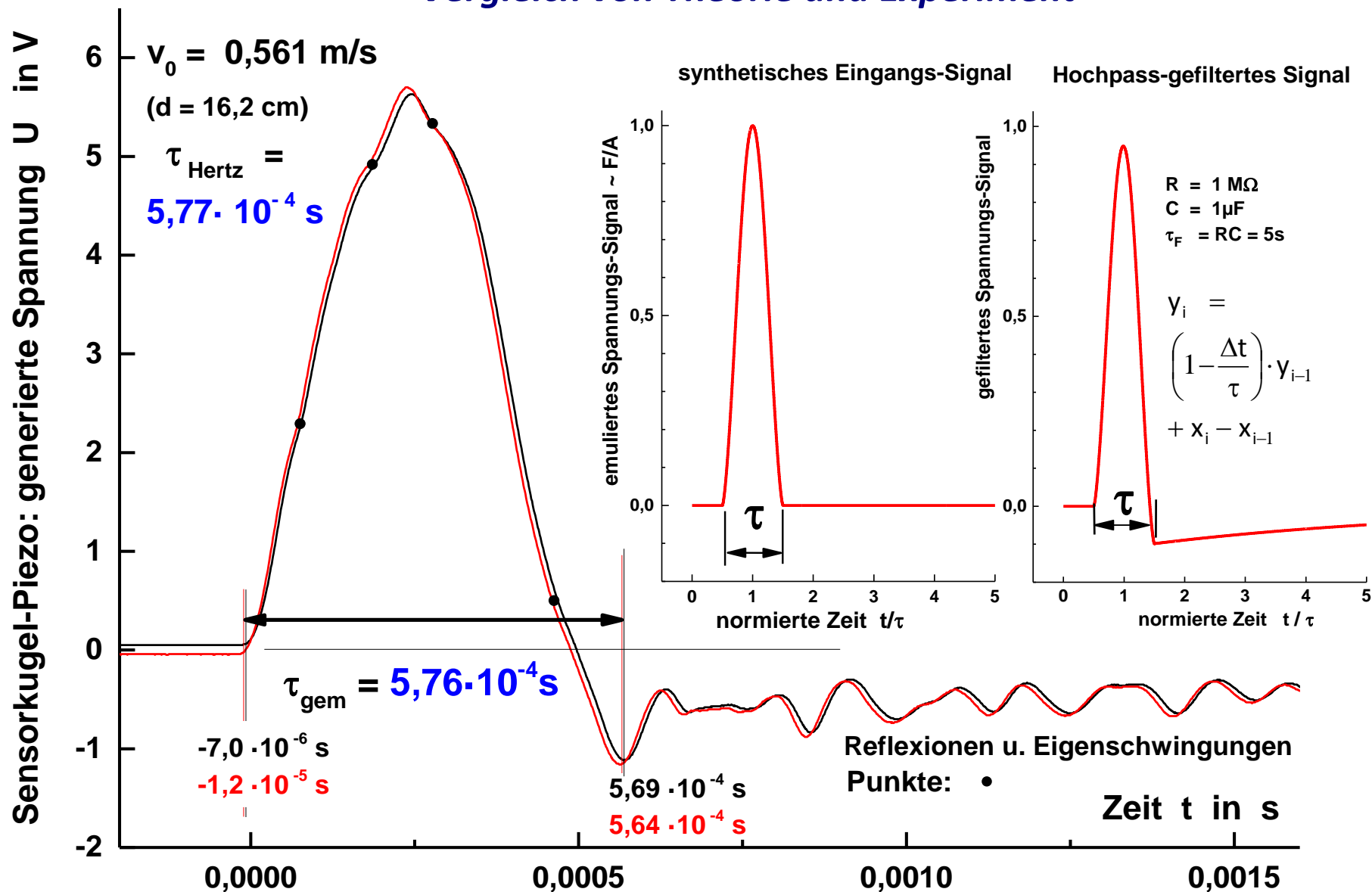
Es ist  $\frac{1}{N} = \frac{\delta\varphi_N}{2\pi}$  und daher  $\frac{F_n}{N} = \frac{F_n \cdot \delta\varphi_N}{2\pi}$

Unabhängig von der Anzahl  $N$  der Federn pro Umfang [Abb. (2c)] gilt dann

$$\frac{F_{n_{\max}}/N}{x_{n_{\max}}^{3/2}} = \frac{\frac{n^3}{3\pi} \cdot \delta\varphi_N^3 \cdot \left[ 1 - \frac{1}{10} \cdot (n\delta\varphi_N)^2 \right]}{\frac{(n\delta\varphi_N)^3}{2^{1,5}} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{12} \cdot (n\delta\varphi_N)^2 \right]^{1,5}} = \frac{\overbrace{0,300105}^{0,30033}}{2^{1,5}} \cdot \frac{\overbrace{\left[ 1 - \frac{1}{10} \cdot \left( \frac{2\pi}{m} \right)^2 \right]}^{1,000762}}{\left[ 1 - \frac{1}{12} \cdot \left( \frac{2\pi}{m} \right)^2 \right]^{1,5}}; \quad (m = 36)$$

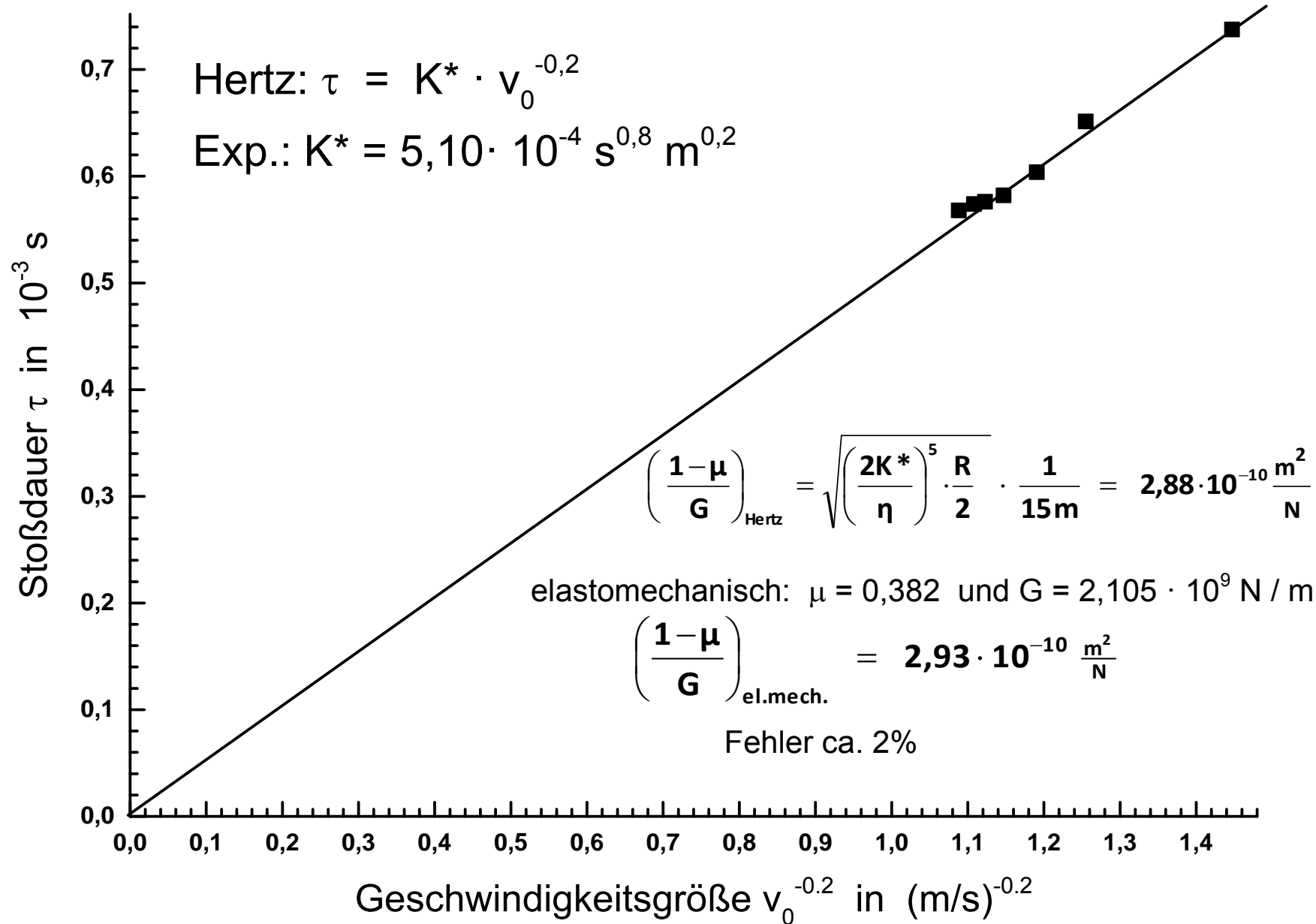
(3a)

### Vergleich von Theorie und Experiment



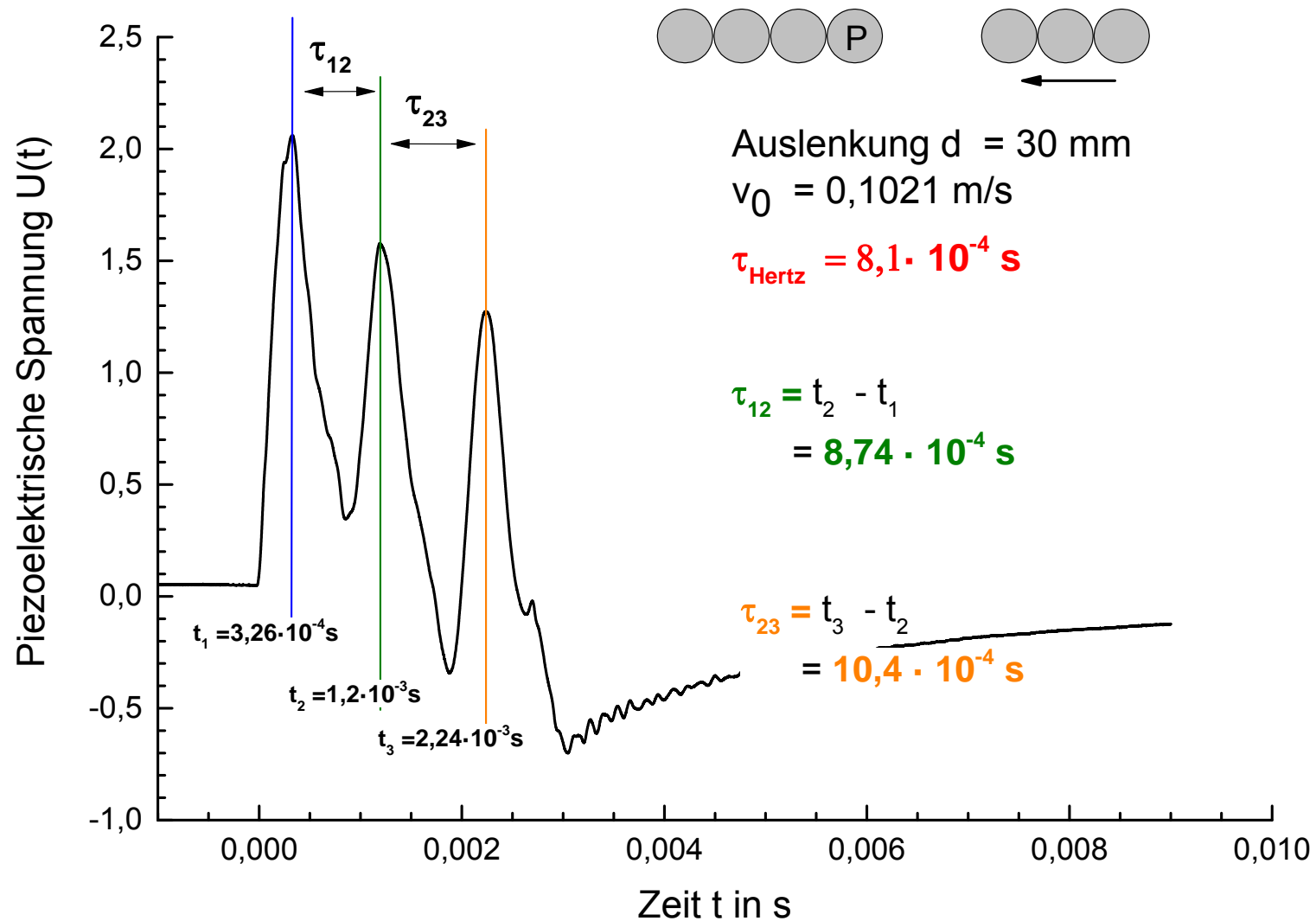
# Messen wir das was wir messen wollen?

(3b)



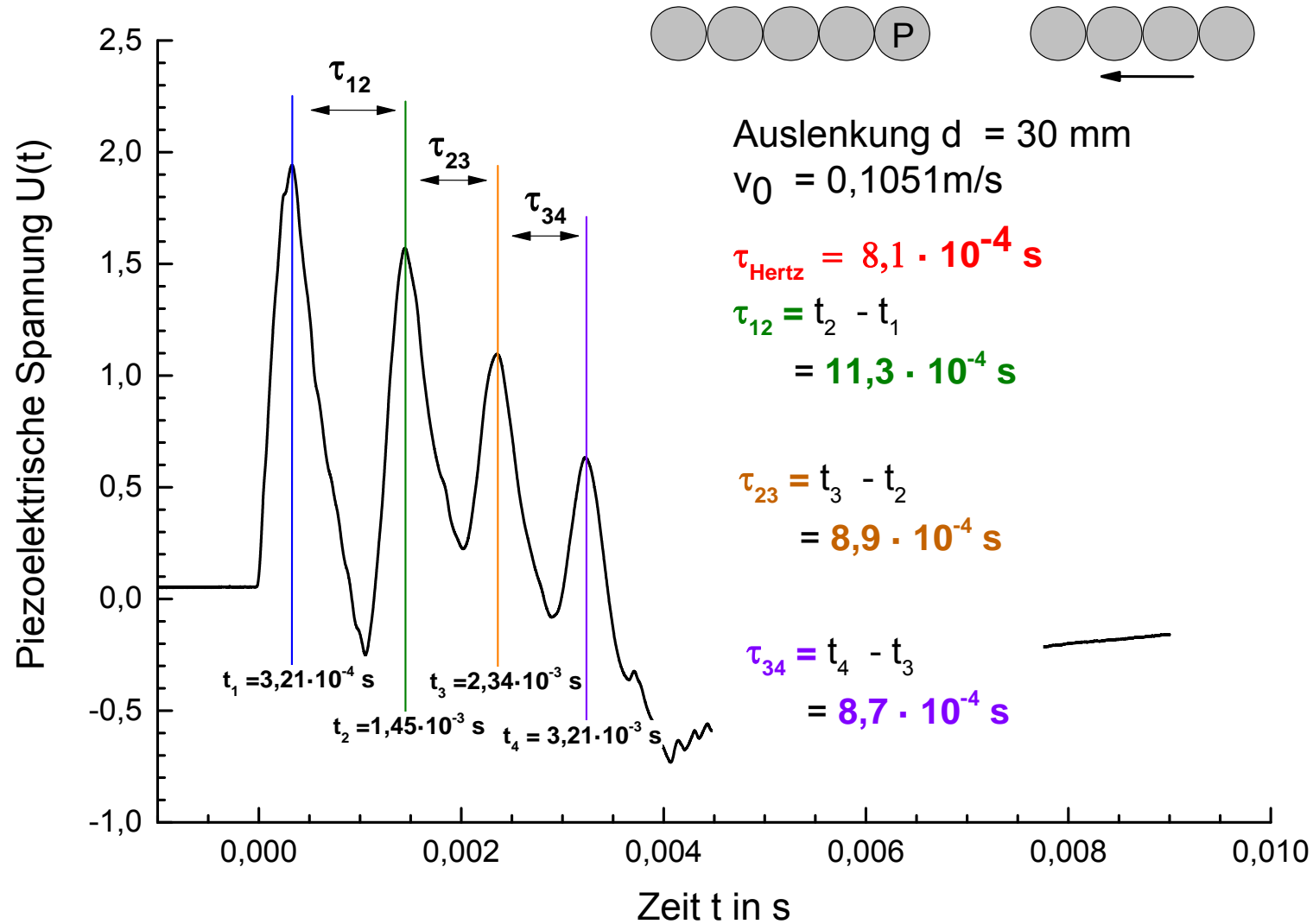
(4a)

### Drei Kugeln treffen auf die Sensorkugel (3K0v3h)

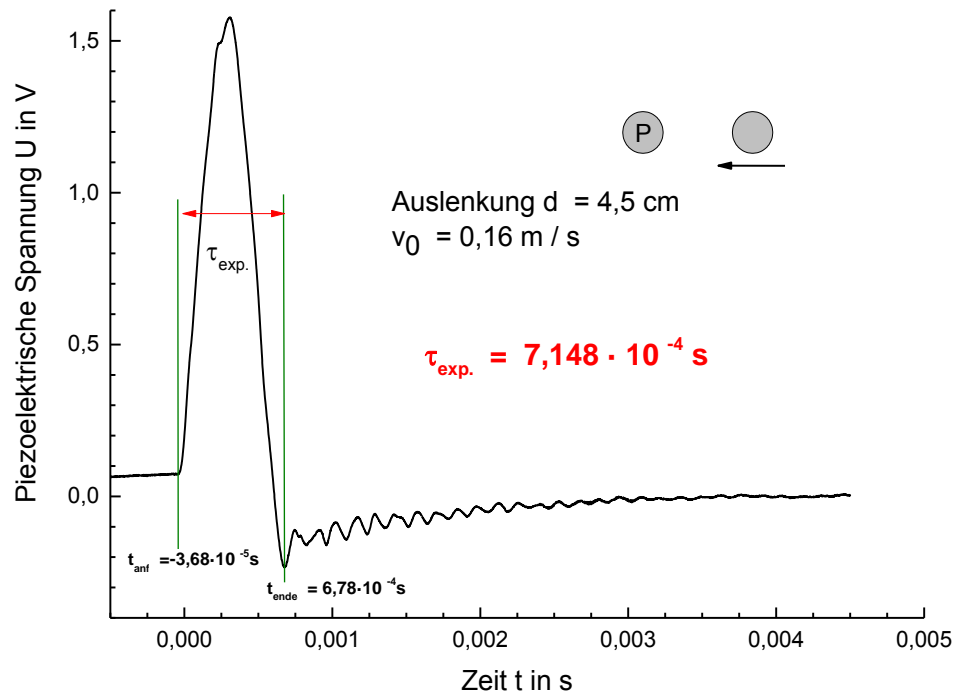




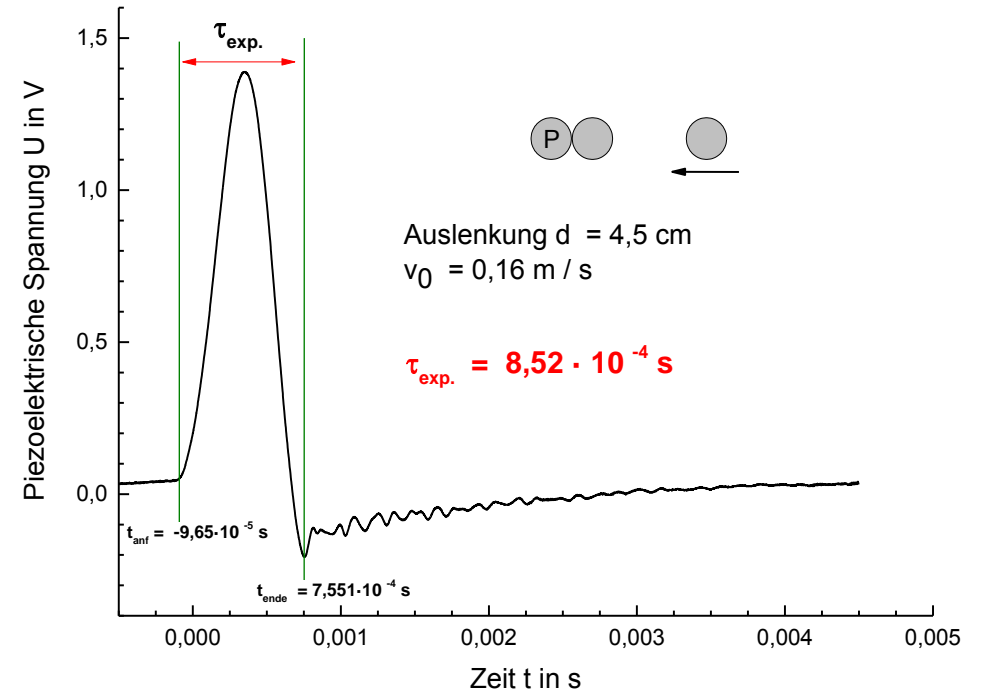
### Vier Kugeln treffen auf die restliche Kugelkette (4K0v4h)



### Dämpfung der Signale in der Kugelkette

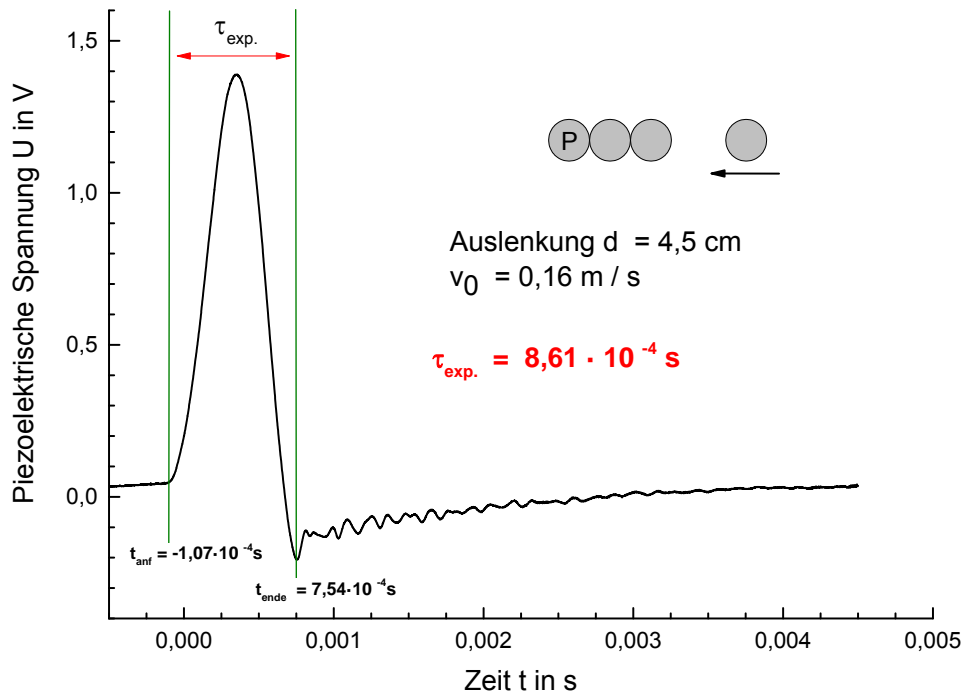


Stoßtyp: 1k0v0h

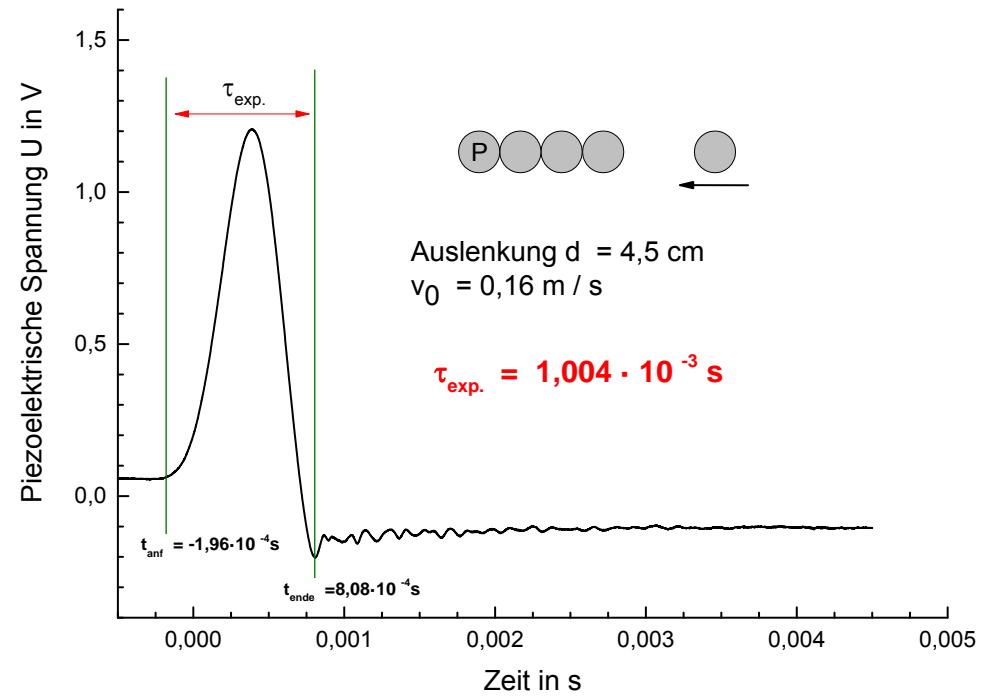


Stoßtyp: 1k1v0h

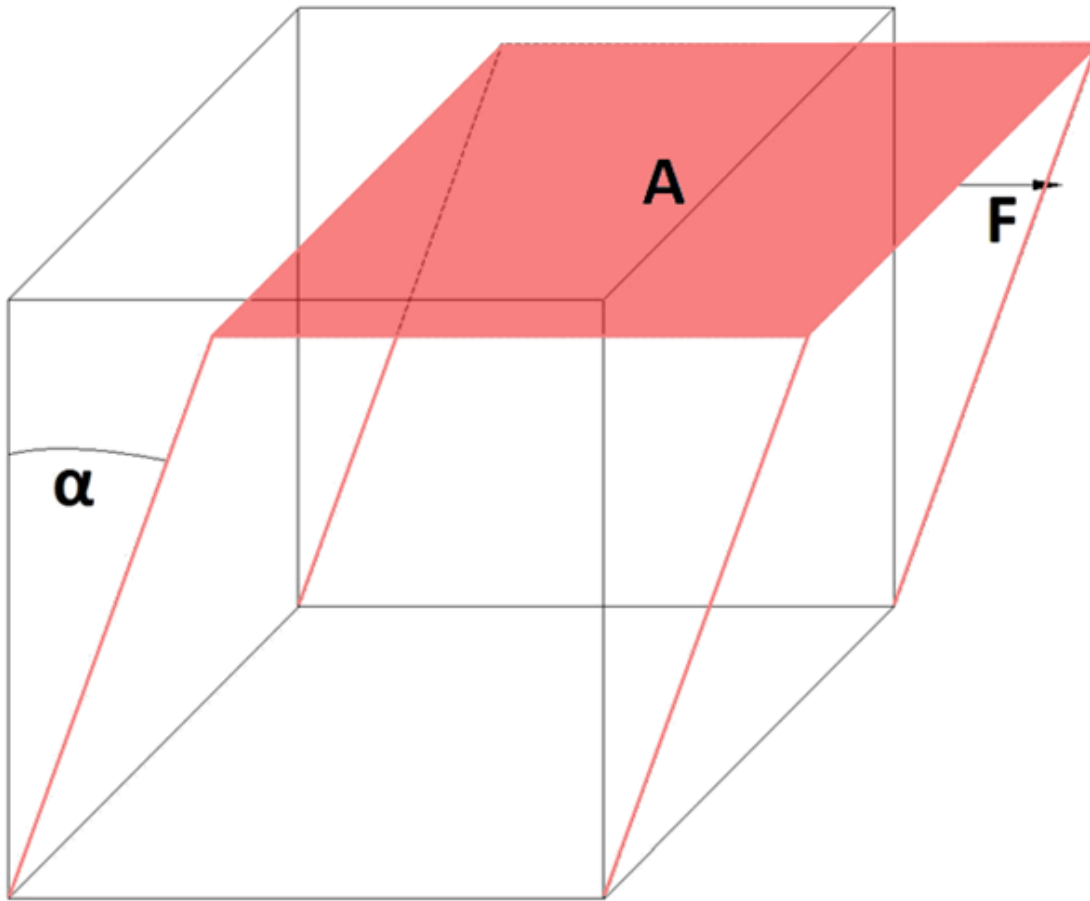
## Dämpfung der Signale in der Kugelkette



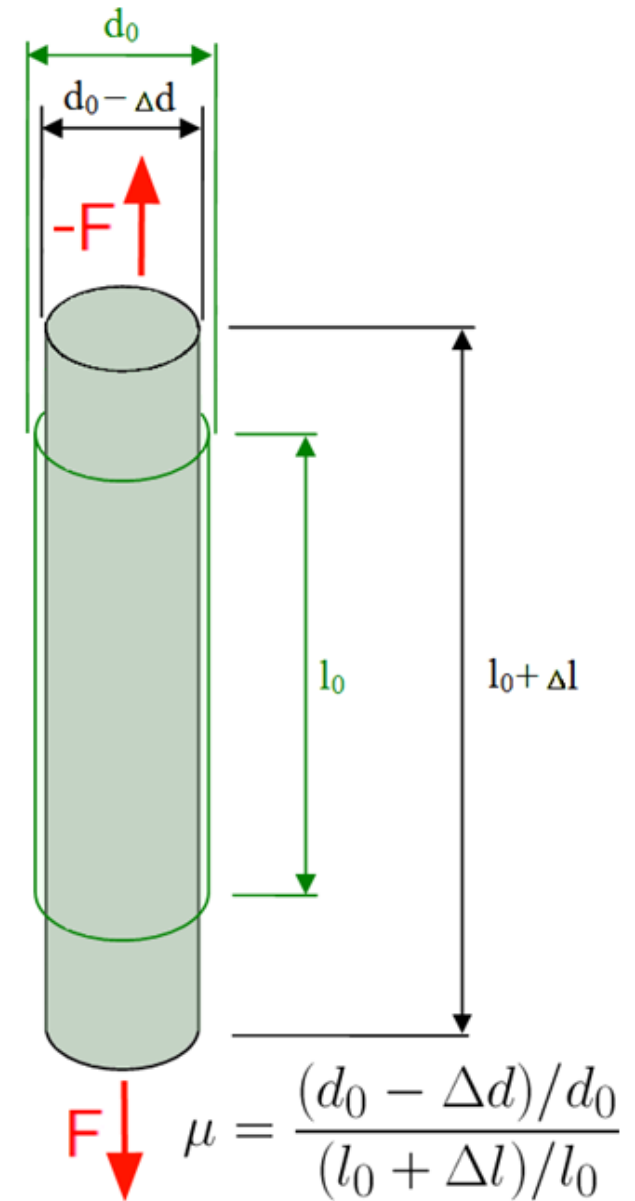
Stoßtyp: 1k2v0h



Stoßtyp: 1k3v0h

Schubmodul  $G$  und Querkontraktion  $\mu$  (Prinzip)

$$G = \frac{F}{A \cdot \alpha}$$

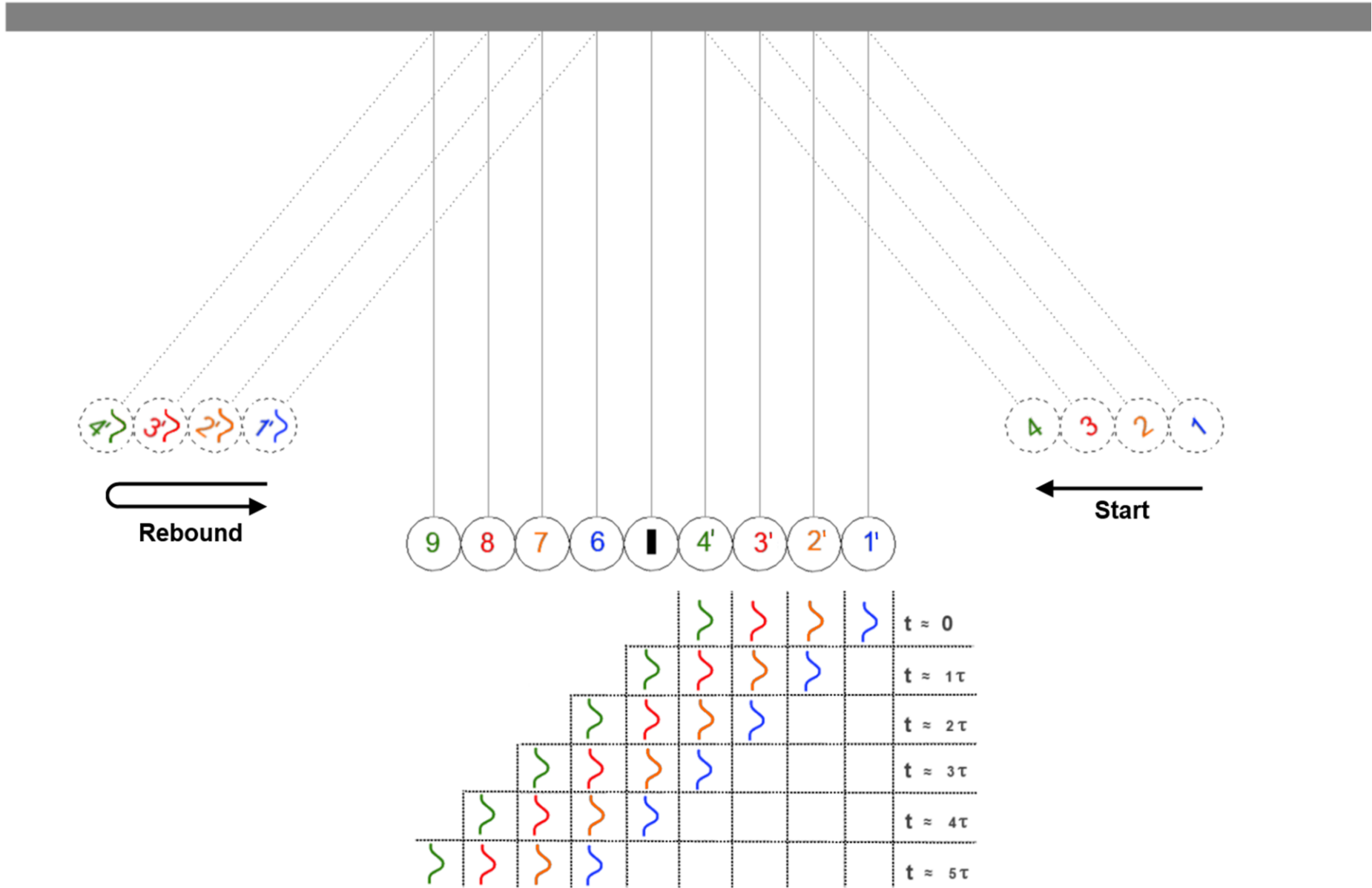


$$\mu = \frac{(d_0 - \Delta d)/d_0}{(l_0 + \Delta l)/l_0}$$



Tafel III

# Taktung der Signale in der Kugelkette



## Simon diskutiert mit Herrn Grooten über die Sensorkugel





## Kristof verdrillt die Sensorkugel-Drähtchen

